

الدكتور
أنيس كنجو

الإحصاء

وطرق تطبيقه في مجالات البحث العلمي

الجزء الثاني

مؤسسة الرسالة

بسم الله الرحمن الرحيم

مقــــدّمة

تعرضنا في الجزء الأول من هذا الكتاب للمفاهيم الإبتدائية في الاحتمال والمتحول العشوائي ، وناقشنا بعض التوزيعات الاحتمالية الأساسية ، ومبادئ الاستقراء الاحصائي في حالة عينات كبيرة الحجم وعينات صغيرة الحجم ، والتراجع الخطي بمتحول مستقل واحد ، ثم بعدة متحولات مستقلة . وكان ذلك في عشرة فصول . وفي هذا الجزء نستكمل المواضيع الأساسية في طرق الاحصاء ، فنناقش في الفصل الحادي عشر وحتى الفصل الرابع عشر ، المفهوم العام لتحليل التشتت وتحليل تمام التشتت ، ونعرض بالتفصيل التصاميم الرئيسية الثلاثة في الاحصاء وهي التصميم التام العشوائية ، وتصميم الزمرة التامة العشوائية ، وتصميم المربع اللاتيني ، بالاضافة إلى طرق تحليل التجارب العاملية . أما الفصلان الأخيران ، وهما الفصل الخامس عشر والفصل السادس عشر ، فيعالجان أهم اختبارات الاحصاء غير الوسيطي ، ويتضمن الملحق عدداً من أهم الجداول الاحصائية مما يحتاجه القارئ الكريم .

إن ميادين تطبيق الاحصاء هي من الاتساع والتنوع بحيث تختلف اهتمامات ميدان منها ، فيما يتعلق بالطرائقية الاحصائية ، عن اهتمامات ميدان آخر . فالطرق الاحصائية التي تهم باحثاً في ميدان علم النفس ، قد تختلف بوجه عام عن تلك التي ينصبّ عليها اهتمام مهندس كيميائي أو مهندس إنتاج أو باحث في العلوم الزراعية . وقد يضطر الباحث إلى بعض التعديل في الطرق العامة المتوفرة له بحيث تتناسب بصورة أفضل مع ميدان بحثه بالذات . وهكذا نجد كتباً

في طرق الاحصاء مخصصة لاهتمامات قطاع معين، مثل العلوم الهندسية أو العلوم البيولوجية أو العلوم الاجتماعية، إلى جانب تلك التي تهتم بتقديم الطرق الاحصائية في اطارها العام. وكتابنا هذا هو من النوع الأخير إذ يقدم قاعدة من الطرائقية الاحصائية، أساسية وعامة في طبيعتها، وتصلح لأن تكون قاسماً مشتركاً لكافة المهتمين في طرق الاحصاء. وهو من هذه الزاوية يصلح لأن يكون كتاباً مدرسياً يزود الطالب بالمعلومات الأساسية في طرق الاحصاء، بحيث يتمكن، معتمداً على نفسه، أن يتابع في أي كتاب منهجي في طرق الاحصاء موجه إلى ميدان بعينه من ميادين المعرفة.

وكما ذكرت في مقدمة الجزء الأول، يشكل هذا الكتاب بجزئية الحلقة الأولى من سلسلة مؤلفات في الاحصاء تتدرج في مستواها. فهناك مخطوطة بعنوان « مبادئ الاحصاء النظري » تعرض الأفكار النظرية الأساسية في الاحصاء لطالب اجتاز التحليل الرياضي الذي يعطى عادة لطلبة السنة الأولى في كلية العلوم. وكتاب جامعي بعنوان « الاحصاء الرياضي » من مستوى السنة الأخيرة في قسم الرياضيات، أو السنة الأولى من الدراسات العليا. أما الكتاب الأخير فهو من مستوى المرحلة المتقدمة من الدراسات العليا في الاحصاء الرياضي.

وأرجو أن يكون في هذا الجزء الثاني والأخير من كتاب « الاحصاء وطرق تطبيقه في ميادين البحث العلمي » كل الفائدة التي أتوخاها للمهتمين في ميدان الاحصاء وللدارسين الذين يحتاجون إلى الطرق الاحصائية والله الموفق.

المؤلف

الفصل الحادي عشر

تحليل التشتت ـ التصميم التام العشوائية

١١ ـ ١ مقدمة : تضطرنا الظروف غالباً لتصميم تجربة ندرس فيها عدة مجتمعات في وقت واحد . واذا رغبنا في تقصي الفروق بين خمسة متوسطات ، أي مقارنة خمسة مجتمعات ، بالاعتماد على الاختبار t بالنسبة لكل زوج منها على حدة ، فلن تكون مثل هذه الطريقة الإحصائية جيدة لعدة أسباب ، أهمها أنه إذا استخدمنا مستوى من الأهمية يساوي 5% عند كل إختبار على حدة فإن مستوى الأهمية بالنسبة لنتيجة نستقرؤها حول المتوسطات الخمسة معاً سيكون أكبر بكثير من 5% . هذا بالإضافة إلى الخسارة في دقة تقدير التشتت نتيجة لإستخدامنا المعلومات المتوفرة في تلك القياسات المتعلقة بالمتوسطين اللذين نقارنهما فقط .

وتوضح الأمثلة التي سنقدمها في الفقرة القادمة أنواعاً من تصميمات التجارب نحللها وفق طرق تسمى طرق تحليل التشتت . ويعتمد التحليل ، كما سنرى في الفقرات القادمة ، على فصل تشتت كافة الملاحظات التي نحصل عليها من التجربة إلى أجزاء ، يشكل كل منها قياساً للتغير يعود إلى مصدر محدد من مصادر التغير ، فمثلاً تغيرات داخلية ضمن كل من المجتمعات المدروسة ، تغيرات من مجتمع إلى آخر ، الخ . وتشير عبارة تحليل التشتت إلى عملية تفكيك تشتت العينة إلى عدة مركبات . ويجب ألا ننسى أن المسألة الأساسية تتعلق بمقارنة متوسطات عدة مجتمعات ، وأننا

نقوم بتفكيك أو تحليل التشتت لهذه الغاية . وسنرى أنه توجد عدة طرق للقيام بمثل هذا التحليل ويعتمد ذلك على هدف التحليل فقد نرغب مثلاً القيام باختبار إجمالي حول تساوي أو عدم تساوي متوسطات المجتمعات المدروسة ، وقد نرغب في التعرف من بين هذه المجتمعات على المجتمع ذي المتوسط الأكبر

١١ ـ ٢ مناقشة أمثلة توضيحية لبعض المسائل :

مثال ١ ـ ١ التصنيف الأحادي : نجد أبسط تطبيقات طريقة تحليل التشتت في مسألة إختبار فرضية تتعلق بمتوسطات k من المجتمعات $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ أو تقدير هذه المتوسطات وتسمى مسألة التصنيف الأحادي . وقد ناقشنا في الفصل السابق الحالة التي تكون فيها k=2 ، حيث إختبرنا الفرضية $\mu_1 = \mu_2$ ،ووضعنا تقديراً مجالياً للفرق $\mu_1 - \mu_2$. ونصنف جميع الأفراد بحيث ينتمي كل منها إلى واحد من هذه المجتمعات فقط وينبغي التأكيد هنا على أن هذه المجتمعات الـ k تستنفذ كل الحالات التي نهتم بها ، وللتمييز بين هذه الحالة والحالة التي تكون فيها المجتمعات الـ k مجرد عينة من عدد أكبر من المجتمعات التي تتطرق إليها الدراسة (وسنتعرض لمثل هذه الحالة في المثالين ٤ و ٥) فسنشير إلى حالتنا هنا على أنها تمثل « نموذج الثوابت » أو « النموذج I » .

ونسوق فيما يلي أمثلة عن تصنيف أفراد مجتمع وفقاً لمتحول واحد :

(أ) لدينا خمس طرق للتعليم (k=5) ومجموعة من أطفال المدارس . ولنتصور خمسة مجتمعات افتراضية يحوي الواحد منها كل الأطفال الذين يتلقون تعليمهم بإحدى هذه الطرق . والمطلوب مقارنة متوسطات المعرفة المكتسبة (مقدرة بواسطة إختبار معين) في كل من الطرق الخمسة .

(ب) لدينا ثلاث مدن (k=3) ونريد مقارنة متوسط دخل السكان

في كل من هذه المدن . ونلاحظ في هذا المثال أن المجتمع هو سكان المدينة . بينما كان المجتمع في المثال السابق غير ملموس أو افتراضي .

(ح) لدينا أربعة أصناف من القمح (k=4) ونتصور مجتمع الانتاج لكل من هذه الأصناف . ونريد مقارنة متوسط إنتاج الأصناف الأربعة .

مثال ٢ ـ التصنيف الثنائي : نصنف الأفراد في هذا المثال وفقاً لخاصتين أو صفتين . وبصورة كيفية تدعى إحدى الصفتين بالمتحول الأول ، ولنفرض أن هذه الصفة تبدو في r من الأشكال ، كما تدعى الصفة الأخرى بالمتحول الثاني ، ولنفرض أنها تبدو في c من الأشكال . وقد وضعنا في الجدول (١١ ـ ١) المتحول الثاني في أعلى الجدول وسنسميه أحياناً متحول الأعمدة . كما نسمي المتحول الأول بمتحول الصفوف . وهكذا يتألف الجدول من c عموداً و r صفاً . ويمثل الجدول (١١ ـ ١) الحالة 3 = c و 4 = r . ويمكن

جدول (١١ ـ ١) التصنيف الثنائي

المتحول الثاني

المتحول الأول		1	2	3	
	1	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	$\mu_{1.}$
	2	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	$\mu_{2.}$
	3	μ_{31}	μ_{32}	μ_{33}	$\mu_{3.}$
	4	μ_{41}	μ_{42}	μ_{43}	$\mu_{4.}$
		$\mu_{.1}$	$\mu_{.2}$	$\mu_{.3}$	$\mu_{..}$

إعتبار كل من الخلايا الاثنتي عشرة في الجدول كمجتمع خاص ، وينتمي كل فرد إلى واحد منها فقط . ونهتم بوجود أو عدم وجود فرق بين متوسطات هذه المجتمعات . ونرمز بـ μ_{ij} لمتوسط المجتمع الخاص بالخلية (ij) ،

حيث يشير الدليل الأول i إلى الصف الذي يحوي هذه الخلية ، ويرمز الدليل الثاني j إلى العمود الذي تقع فيه الخلية (ij) . و μ_{23} مثلاً هو متوسط مجتمع الأفراد الذين يجمعون الصفة 2 من المتحول الأول والصفة 3 من المتحول الثاني . وتظهر على الجانب الأيمن من الجدول مقادير من النوع $\mu_{i.}$ نعرفها بأنها متوسط الصف i ، ومثلاً $\mu_{1.}=(\mu_{11}+\mu_{12}+\mu_{13})/3$ ،

وفي أسفل الجدول تظهر المقادير $\mu_{.j}$ نعرفها بأنها متوسط العمود j ، فمثلاً $\mu_{.1}=(\mu_{11}+\mu_{21}+\mu_{31}+\mu_{41})/4$. والمتوسط العام للمقادير μ_{ij} الاثني عشر نرمز له بـ $\mu_{..}$ وقد سجلناه في الزاوية السفلية اليمنى من الجدول .

ونفترض كما في المثال الأول أن r و c تستنفذ كل ما نهتم به من أشكال الصفة الأولى والصفة الثانية ، على الترتيب ، وأنهما ليسا عينتين من عدد أكبر من الأشكال . أي أننا في هذا المثال أيضاً في حالة « نموذج الثوابت » أو « النموذج I » .

ونسوق الأمثلة التالية على حالة التصنيف الثنائي :

(أ) لدينا أطفال ثلاث مدارس (c = 3) وأربع طرق تعليم (r = 4) نريد إختبارها . ونفترض ، في « نموذج الثوابت » ، أن اهتمامنا لا يتعدى المدارس الثلاث ، وبصورة خاصة فإننا لا نستقرئ من النتائج أي شيء يتعلق بمجموعة أكبر من المدارس . ونريد هنا مقارنة المدارس ببعضها ومقارنة طرق التعليم ، وربما رؤية ما إذا كان يوجد أي تفاعل بين مدرسة وطريقة معينتين .

(ب) لدينا ثلاث مدن (c = 3) وقسمنا العاملين في كل منها إلى مجموعتين وفقاً للجنس (r = 2) . ونريد مقارنة متوسط دخل الرجال مع متوسط دخل النساء ، ومقارنة متوسط الدخل بين المدن الثلاث ، ثم رؤية ما إذا كان يوجد أي تفاعل كأن نجد ، مثلاً ، في مدينة معينة متوسط دخل كبير (أو صغير) بصورة غير اعتيادية للرجال أو للنساء ولكن ليس للجنسين معاً

(ح) لدينا أربعة أنواع من القمح (c = 4) وثلاثة أنواع من الأسمدة (r = 3) ونريد اكتشاف ما إذا كان تركيب معين بين نوع من القمح ونوع من السماد يؤدي إلى متوسط إنتاج أفضل من التراكيب الباقية . أو أننا نريد معرفة ما إذا كان أحد أنواع الأسمدة أفضل ، على وجه الإجمال ، من النوعين الآخرين . (وتشير عبارة « على وجه الإجمال » إلى أننا نعتبر إنتاج هذا السماد مستخدماً مع الأنواع الأربعة من القمح) .

مثال ٣ ـ التصنيف المتعدد : ويمكن تعميم المثال السابق إلى حالات نصنف فيها الأفراد وفقاً لأكثر من متحولين . فمثلاً يمكن تصنيف سكان ثلاث مدن وفقاً لِـ : (أ) المدينة التي يعيشون فيها . (ب) الجنس ، و (ح) كون الدخل أكثر أو أقل من 3600 ل.س سنوياً . وهكذا ينقسم السكان إلى 12 مجتمعاً جزئياً ، الرجال في المدينة 1 الذين يكسبون أكثر من 3600 ل.س سنوياً ، الرجال في المدينة 1 الذين يكسبون أقل من 3600 ل.س ؛ النساء في المدينة 1 اللواتي يكسبن أكثر من 3600 ل.س سنوياً الخ . ونريد معرفة ما إذا كان متوسط النسبة المئوية من الدخل السنوي ، الذي يُنفق على الطبابة ، نفسه : بالنسبة للمدن الثلاث ، بالنسبة لفئتي الدخل ، وبالنسبة للجنسين . أو ما اذا كان هناك نوع من التفاعل بين هذه التصنيفات .

مثال ٤ ـ مركبات التشتت : اذا كانت المجتمعات المدروسة وليكن عددها k ، مثلاً ، هي عينة من عدد أكبر من المجتمعات ، التي نرغب القيام باستقراء حولها ، ولا تشكل لوحدها هدفاً للدراسة ، فإننا نشير إلى مثل هذه الحالة « بنموذج مركبات التشتت » . ومع أن التحليل والعمليات الحسابية تبقى كما هي في « نموذج الثوابت » ، إلا أن تفسير النتائج يختلف في الحالتين . وبالإضافة إلى مسألة مقارنة المتوسطات $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ للمجتمعات التي تطرقت إليها التجربة ، لدينا هنا مسألة الاستقراء إلى ما وراء هذه المجتمعات ، إلى الصف من المجتمعات الذي تشكل المجتمعات الـ k المدروسة عينة منه .

وكأمثلة على هذه الحالة نسوق ما يلي :

(أ) لدينا مجموعة من 50 مدرسة ونختار عينات من الطلبة من خمس من هذه المدارس (k=5) . ونريد إختبار فرضية حول متوسطات مقادير تتعلق بإنتاجية هذه المدارس مستخدمين المعلومات المتوفرة لنا من خمس من هذه المدارس اخترناها لهذه الغاية .

(ب) لدينا مجموعة من 200 مدينة ونختار عينات من سكان كل من عشر مدن (k=10) . ونريد تقدير متوسط الدخل أو تشتت متوسط الدخل في المائتي مدينة .

(ح) يمكن استخدام سماد من أجل 10 أنواع من القمح . ونختار من بينها ثلاثة أنواع (k=3) ونريد تقدير متوسط الإنتاج عند إستخدام هذا السماد من أجل الأنواع العشرة . ونلاحظ هنا أن التصنيف أحادي بإعتبار أنه يوجد سماد واحد فقط .

مثال ٥ ـ مركبات متحولين والنموذج المختلط : تحصل حالة مركبات التشتت أيضاً في حالة تصنيف ثنائي أو متحولين . فإذا كانت الحالات التي يفترضها كل متحول أو صفة ضمن التجربة هي عينة من عدد أكبر من الحالات ، نقول إن النموذج المستخدم هو « نموذج مركبات التشتت » في حالة متحولين . وإذا استخدمنا في التجربة كل الحالات التي يفترضها أحد المتحولين وعينة فقط من الحالات التي يمكن أن يفترضها المتحول الآخر فنشير إلى مثل هذه الحالة على أنها حالة « النموذج المختلط » . وكأمثلة على هاتين الحالتين نذكر :

(أ) مركبات التشتت : لدينا مجموعة من 50 مدرسة وطلاب من 12 زمرة من زمر السنّ . نختار خمس مدارس (k=5) ، وزمرتين من زمر السنّ (r = 2) ، ونأخذ قياسات تتعلق بطلاب ضمن هاتين الزمرتين في كل

المدارس الخمس . ويمكن أن تتطرق القياسات إلى : القدرة على التعلّم ، والنقود المصروفة على وسائل التسلية ، معدل النموّ ، الخ . ونريد القيام باستقراء يتناول كل المدارس الخمسين وكل الزمر الاثنتي عشرة . وعلى سبيل المثال ، قد نرغب في معرفة ما إذا كان متوسط المهارة التعليمية في المدارس الخمسين فوق القياس المعتاد ، معتمدين في مثل هذه المعرفة على البيان الإحصائي الذي حصلنا عليه من المدارس الخمس .

(ب) مركبات التشتت : لدينا بمجموعة من المدن تحوي مائتي مدينة وخمسة عشر شريحة دخل بالنسبة للعاملين في هذه المدن . ونختار عينة من العاملين من كل من عشرين مدينة (c = 20) ، وذلك ضمن ثلاث شرائح للدخل (r = 3) نختارها ، ثم نقيس من أجل كل عامل تحصيله التربوي . ونريد القيام باستقراء يتعلق بمقارنة متوسطات التحصيل التربوي للعاملين في المائتي مدينة ، ومتوسطات التحصيل التربوي ضمن كل من شرائح الدخل الإثنتي عشرة . ويمكن أن نهتم أيضاً فيما إذا كانت هناك دلالة على وجود تفاعل بين المدينة ومستوى الدخل . فمثلاً يمكن أن توجد في بعض المدن شرائح دخل معينة يكون متوسط التحصيل التربوي فيها عالياً أو منخفضاً بصورة غير إعتيادية .

(ح) النموذج المختلط : لدينا أربعة أنواع من القمح (c = 4) وستين موقعاً عاماً في القطر العربي السوري نزرع فيه القمح . ونختار خمسة من هذه المواقع بصورة عشوائية (r = 5) ونزرع في كل منها الأنواع الأربعة من القمح . وبما أن كل أنواع القمح التي نهتم بدراستها موجودة في التجربة التي تحوي عينة من المواقع فقط (خمسة مواقع) فلدينا هنا تجربة نموذج مختلط .

وتحاول معظم التحريات العلمية أن تأخذ بعين الإعتبار عوامل أخرى إلى جانب العامل الذي هو موضع الدراسة . وغالباً ما تكون الطرق الموضحة

أعلاه ، والتي ترتب العوامل وفق تصنيفات عامة ، مفيدة لهذه الغاية ، بإعتبار أنها تسمح بالقيام بدراسة عند كل مستوى من مستويات كل من العوامل التي تضمها التجربة . ويأتي هذا النوع من التجارب العلمية في مقابل الطريقة التي تبقى فيها كل العوامل مثبتة بإستثناء العامل المدروس . ولإيضاح هذه النقطة نذكر الأمثلة التالية :

لنفرض أننا نرغب في مقارنة طريقتين في تعليم موضوع معين ونختار مجموعات من الطلبة فيها نفس نسبة الذكور والإناث ولأفرادها نفس المستوى من الذكاء ، ونفس الأعمار ، الخ . ولكن تنفيذ التجربة ، بمعلم واحد أو ضمن مدرسة واحدة ، يخضع للانتقاد بأن هذا المعلم بعينه يمتاز بكفاءة خاصة بالنسبة لإحدى الطريقتين ، أو أن تفوق إحدى الطريقتين يعود إلى المدرسة التي تمت فيها التجربة . ومن الواضح أنه ينبغي لتجربة من هذا النوع أن تحوي عدداً من المدارس وعدداً من المعلمين في كل مدرسة . وبالإستناد إلى طبيعة المسألة المدروسة ، فقد يكون من الأفضل أن تشمل التجربة مدارس أكثر ، حتى ولو اضطررنا إلى استخدام معلم واحد في كل مدرسة . وهكذا فإننا لا نرغب عند دراسة ظاهرة معينة أن نثبت كل العوامل بإستثناء العامل المدروس ، وإنما نرغب في تبيان وجود الظاهرة بصورة مستقلة عن العوامل الأخرى .

لنفرض الآن أننا نرغب في دراسة تأثير بضع معالجات على مجموعة من الفئران البيضاء . ولنفرض ، مثلاً ، أننا أعطينا زرقاً بتركيز مختلف إلى أربع مجموعات من الفئران ثم لاحظنا قدرتها على اجتياز متاهة . فإذا وجدنا أن هناك فرقاً يُذكر بين قدرات المجموعات الأربع ، ولكن اكتشفنا عند دراسة سجلاتها أنه توجد أيضاً فروق لا يمكن إغفالها بين هذه المجموعات تتعلق بأعمارها ، فلا يمكننا أن نعوّل على نتيجة مثل هذه التجربة ، بل نعتبرها باطلة . ومن السهل أن نرى بأن المطلوب هنا هو إزالة أية فرصة في أن يكون

لفروق في العمر أو التدريب أو الجنس أو فروق في تجارب سابقة خضعت لها هذه الفئران ، أثر أو قدرة على التغيير ، بحيث نستنتج خطأ أنها جاءت كنتيجة لمعالجاتنا ، أو أنها تسبب كثيراً من التغييرات في النتائج بحيث تحجب أية تأثيرات لمعالجاتنا .

واذا رغبنا في مقارنة إنتاجية بضع سلالات من الذرة الصفراء ، فلا بد من إعتبار عوامل هامة مثل وقت الزرع ، خصوبة التربة ، كمية السماد ، الخ . فإما أن يتمكن المجرب من التحكم بهذه المتحولات أو أن نصمم التجربة بحيث يمكن تقدير تأثيرات وقت الزرع ، خصوبة التربة ، الخ . ، وفصلها عن تأثير الفرق بين السلالات نفسها على الإنتاج . وقد يكون ضرورياً أن نستخدم عدة أوقات للزرع ، وأن نعالج الذرة الصفراء بكميات مختلفة من السماد ، الخ . لكي نستطيع تقدير مثل هذه التأثيرات .

ويجب أن تشمل دراسة طرق مختلفة لمعالجة أطفال قاصرين ، حالات من بيئات مختلفة ثقافياً واقتصادياً وجغرافياً الخ .

ويمكن اللجؤ إلى طرق إحصائية أبسط في الحالات التي يمكن فيها التحكم في المتحولات الهامة وإبقائها ثابتة ، كما هي الحال مثلاً في تجربة تجري داخل مخبر ، وعندما لا تسمح الظروف بالتحكم بمثل هذه المتحولات يجب تطوير طريقة إحصائية تأخذ بعين الاعتبار مثل هذه التغيرات المختلفة . وعلى أي حال فإنه حتى في الحالات التي يمكن التحكم فيها بكافة المتحولات الهامة ، قد يكون ذلك مكلفاً إلى الحد الذي يمنعنا عملياً من القيام به . بالإضافة إلى أنه قد يؤدي تثبيت هذه المتحولات الهامة عند قيم معينة إلى نتائج تجريبية مختلفة عما لو كنا ثبتناها عند قيم أخرى . وأحياناً تكون إعادة التجربة تحت نفس الشروط التجريبية المحيطة أمراً بالغ الصعوبة . . .

وعامل الزمن هو أحد العوامل الرئيسية التي تدعونا إلى تصميم تجربة تدرس عدداً من المعالجات أو العوامل في نفس الوقت . فغالباً ما تستغرق تجربة

زراعية أو بيولوجية عاماً كاملاً ، مما يجعل من الهام أن ننجز التجربة على أكمل وجه ممكن .

١١ ـ ٣ التصنيف الأحادي ـ النموذج I : في هذه الحالة ينتمي كل فرد إلى واحد وواحد فقط من k من المجتمعات المتميزة ، بمتوسطات هي $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. ونريد القيام باستقراءات تتعلق بمقادير هذه المتوسطات . وفي هذه الفقرة سنعرض طريقة لاختبار الفرضية بأن جميع هذه المتوسطات وعددها k متساوية فيما بينها .

نأخذ عينة عشوائية من كل مجتمع وليكن حجم كل منها n . ولنرمز لمجموع قياسات العينة الأولى بِـ T_1 ولمجموع قياسات العينة الثانية بِـ T_2 وهكذا ، ثم لنرمز للمجموع الكلي لجميع القياسات المأخوذة في التجربة بـ T . وبصورة مشابهة نرمز لمتوسط العينة الأولى بِـ $\bar{x}_1$ ومتوسط العينة الثانية بِـ $\bar{x}_2$ وهكذا ، ولمتوسط كل قياسات التجربة أو المتوسط الإجمالي بِـ $\bar{x}$. وبما أن هذه العينات تمثل ، في معظم التطبيقات العملية التي تهمنا ، نتائج تطبيق المعالجات المختلفة التي تدرسها التجربة فسنستخدم مصطلح « المعالجة » ليعني نفس ما تعنيه العينة . ويلخص الجدول (١١ ـ ٢) هذه الرموز .

جدول ١١ ـ ٢ حالة k من العينات حجم كل منها n .

	العينة الأولى أو المعالجة الأولى	العينة الثانية أو المعالجة الثانية	...	العينة k أو المعالجة k	
	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}	
	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	
	⋮	⋮		⋮	
	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nk}	
المجموع	T_1	T_2	...	T_k	المجموع الكلي T
المتوسط	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	...	$\bar{x}_k$	المتوسط الإجمالي $\bar{x}$

وترمز x_{ij} في متن الجدول إلى القياس i من العينة j أو نتيجة التطبيق i للمعالجة j .

ونعرف مجموع المربعات الكلي على الشكل :

$$SS = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x})^2 \qquad (1)$$

ويعني المجموع المضاعف في هذه العلاقة أن الدليل الثاني j يتحول من 1 إلى k ويتحول الدليل الأول i فوق الأعداد الصحيحة من 1 إلى n . وبعبارة أخرى فإن مجموع المربعات الكلي هو مجموع مربعات انحرافات جميع القياسات أو الملاحظات التي تتضمنها التجربة عن متوسطها الإجمالي ؛ أي أنها تقيس مدى إنتشار أو تبعثر هذه الملاحظات حول متوسطها الإجمالي .

ونعرف مجموع مربعات ما بين المتوسطات على الشكل :

$$SST = n \sum_{j=1}^{k} (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \qquad (2)$$

وباعتبار أن المتوسط الإجمالي $\bar{x}$ هو أيضاً متوسط المتوسطات $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ فإن العلاقة (2) تمثل مجموع مربعات إنحرافات متوسطات العينات عن المتوسط الإجمالي . وستنخفض قيمة هذا المجموع كلما كانت قيم متوسطات العينات قريبة من بعضها البعض . وعلى الوجه الآخر إذا تمخض تطبيق المعالجات عن تأثيرات مختلفة جداً فستكون هناك فروق كبيرة بين متوسطات العينات مما يؤدي إلى قيمة كبيرة لمجموع المربعات SST.

ونعرف مجموع مربعات ما ضمن العينات على الشكل :

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - \bar{x}_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \qquad (3)$$

وفي المجموع الأول من الطرف الأيمن من العلاقة (3) نجد مجموع مربعات انحرافات قياسات العينة الأولى عن متوسطها وهو يقيس التشتت

ضمن العينة الأولى . وبصورة مشابهة يمثل الحد الثاني التشتت ضمن العينة الثانية وهكذا . ومجموع المربعات SSE هو قياس لتشتت الملاحظات ضمن العينات حول متوسطاتها الموافقة ، وهو مستقل عن أي فرق بين متوسطي عينتين ؛ وتعتمد قيمته فقط على التغيرات التصادفية التي ترافق أية تجربة وهي تمثل بالتالي الخطأ التجريبي .

مثال ٦ : لنعتبر العينات الخمس التالية وفي كل منها ثلاث ملاحظات :

	3	5	7	6	4	
	2	8	8	8	9	
	4	8	6	7	5	
المجموع	9	21	21	21	18	$T = 90$
المتوسط	3	7	7	7	6	$\bar{x} = 6$

وسنحسب في هذا المثال SS ، SST ، و SSE كما عرفناها أعلاه

$$SS = (3-6)^2 + (2-6)^2 + (4-6)^2 + (5-6)^2 + (8-6)^2 + \ldots + (5-6)^2$$
$$= 62$$

$$SST = 3\,[\,(3-6)^2 + (7-6)^2 + (7-6)^2 + (7-6)^2 + (6-6)^2\,]$$
$$= 3(9 + 1 + 1 + 1 + 0) = 36;$$

$$SSE = (3-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (5-7)^2 + (8-7)^2 + (8-7)^2$$
$$+ \ldots + (5-6)^2 = 26$$

ولا نتبع عملياً هذه الطريقة في حساب SS ، SST و SSE إذ توجد طريقة أسهل بكثير للحصول على هذه المقادير ويمكن الاستفادة فيها من الآلات الحاسبة العادية ، وتعبر العلاقات التالية التي تسمى بالأشكال الحسابية لمجاميع المربعات المعرفة أعلاه ، عن هذه الطريقة :

$$SS = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2 - \frac{T^2}{kn} \qquad (4)$$

$$SST = \frac{\sum_{j=1}^{k} T_j^2}{n} - \frac{T^2}{kn} \qquad (5)$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{k} T_j^2}{n} \qquad (6)$$

مثال ٢ : احسب SS ، SST ، و SSE في المثال 1 باستخدام الأشكال الحسابية .

$$SS = 3^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + 5^2 - \frac{8100}{15} = 602 - 540 = 62;$$

$$SST = \frac{9^2 + 21^2 + 21^2 + 21^2 + 18^2}{3} - \frac{8100}{15} = 576 - 540 = 36;$$

$$SSE = 3^2 + 2^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + 5^2 - \frac{9^2 + 21^2 + 21^2 + 21^2 + 18^2}{3}$$

$$= 602 - 576 = 26.$$

ولبيان صحة العلاقات (4) ، (5) و (6) يكفي أن نتذكر أنه اذا كان لدينا مجموعة من N من الأعداد $x_1, x_2, \ldots, x_N$ متوسطها $\bar{x}$ فإن :

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N}$$

أي أن مجموع مربعات انحرافات N من الأعداد عن متوسطها يساوي إلى مجموع مربعات هذه الأعداد مطروحاً منها حاصل قسمة مربع مجموع هذه الأعداد على عددها . ومن العلاقة (1) نجد أن SS هو عبارة عن مجموع مربعات انحرافات القياسات الـ kn التي تحويها التجربة وهي $x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{kn}$ عن متوسطها ، وبالتالي فهي تساوي وفقاً للقاعدة السابقة مجموع مربعات هذه الأعداد $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2$ مطروحاً منها حاصل قسمة مربع مجموعها على عددها أي $\frac{T^2}{nk}$. وهكذا تكون العلاقة (4) هي شكل آخر للعلاقة (1) أسهل وأقصر بالنسبة للعمليات الحسابية .

وبتطبيق القاعدة السابقة على الأعداد $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ ومتوسطها $\bar{x}$ نجد أن العلاقة (2) تصبح :

$$SST = n\left[\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j^2 - \frac{\left(\sum_{1} \bar{x}_j\right)^2}{k}\right]$$

$$= n\left[\sum_{j=1}^{k} \frac{T_j^2}{n^2} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{k} T_j\right)^2}{kn^2}\right] = \frac{\sum_{j=1}^{k} T_j^2}{n} - \frac{T^2}{kn}$$

وهي العلاقة (5) .

ولبيان أن (6) هي شكل آخر للعلاقة (3) نطبق القاعدة المذكورة أعلاه على كل من مجاميع المربعات الـ k التي تظهر في (3) فنجد :

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\right)^2}{n} + \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i2}\right)^2}{n}$$

$$+ \cdots + \sum_{i=1}^{n} x_{ik}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ik}\right)^2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2 - \frac{T_1^2}{n} - \frac{T_2^2}{n} - \cdots - \frac{T_k^2}{n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{k} T_j^2}{n}$$

ويلاحظ القارئ من المثال (1) أن مجموع SST و SSE هو SS أي أن 62 = 26 + 36،وفي الحقيقة فإن هذه الخاصة هي قاعدة تصح من أجل أية مجموعة من القياسات ولبيان ذلك نكتب :

$$SST + SSE = \frac{\sum_{j=1}^{k} T_j^2}{n} - \frac{T^2}{kn} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{k} T_j^2}{n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2 - \frac{T^2}{kn} = SS$$

واذا كان $\bar{x} = 0$ فإن SS تصبح مساوية لمجموع مربعات القياسات في التجربة أي $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}^2$، وهو الحد الأول من العلاقة (4). ولذلك فإن الحد $\frac{T^2}{kn}$ يلعب دور المصحح بحيث يصبح مجموع المربعات مأخوذاً حول المتوسط وليس حول الصفر، وهذا هو السبب في أن الحد $\frac{T^2}{kn}$ يدعى

في كتب الإحصاء التطبيقي حدّ التصحيح وسنرمز له بِـ C أي أن :

$$C = \frac{T^2}{kn}$$

وسنقول بعد الآن مجموع المربعات حول المتوسط لتعني مجموع مربعات الإنحرافات عن المتوسط .

وإذا لم يكن للعينات الـ k نفس الحجم ، أي لو فرضنا أن حجم العينة الأولى n_1 وحجم العينة الثانية n_2 وهكذا ، فإن الجدول (١١ ـ ٢) يصبح على الشكل :

جدول ١١ ـ ٣ حالة k عينة بأحجام غير متساوية .

	العينة الأولى أو المعالجة الأولى	العينة الثانية أو المعالجة الثانية		العينة k أو المعالجة k		
	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}		
	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}		
	$x_{n_1,1}$	$x_{n_2,1}$	...	$x_{nk,k}$		
المجموع	T_1	T_2	...	T_k	المجموع الكلي	T
المتوسط	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	...	$\bar{x}_k$	المتوسط الإجمالي	$\bar{x}$

وتحتاج العبارات المعرفة بالعلاقات (1) ، (2) و (3) إلى تعديلات بسيطة لتصبح متفقة مع الحالة الجديدة . وهنا تأخذ العلاقات الأشكال التالية :

$$SS = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{i1} - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{i2} - \bar{x})^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ik} - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x})^2 \quad (7)$$

$$SST = n_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_k (\bar{x}_k - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2 \quad (8)$$

$$SSE =$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 + \cdots$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ik} - \bar{x}_k)^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_k)^2 \quad (9)$$

وتوجد بصورة مشابهة أشكال حسابية لهذه العلاقات :

$$SS = \sum_{i=1}^{n_1} x_{i1}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}^2 + \cdots \sum_{i=1}^{n_k} x_{ik} - \frac{T^2}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \frac{T^2}{\sum_{j=1}^{k} n_j} \quad (10)$$

$$SST = \frac{T_1^2}{n_1} + \frac{T_2^2}{n_2} + \cdots + \frac{T_k^2}{n_k} - \frac{T^2}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{T_j^2}{n_j} - \frac{T^2}{\sum_{j=1}^{k} n_j} \quad (11)$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n_1} x_{i1}^2 + \sum_{i=1}^{n_2} x_{i2}^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{n_k} x_{ik}^2 - \left(\frac{T_1^2}{n_1} + \frac{T_2^2}{n_2} + \cdots + \frac{T_k^2}{n_k}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - \sum_{j=1}^{k} \frac{T_j^2}{n_j} \quad (12)$$

لنعد الآن إلى حالة عينات متساوية الحجم ولنفرض أننا نريد إختبار الفرضية بأن هذه العينات جاءت من مجتمع واحد ، وبعبارة أوضح نريد إختبار الفرضية $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ فعندئذ يمكن تقدير التشتت في هذا المجتمع ولنرمز له بِـ σ^2 بطريقتين والحصول على تقديرين مستقلين تماماً لِ σ^2 .

١ ـ يمكن تقدير σ^2 بضم المعلومات من العينات الـ k ، وذلك كتعميم للطريقة التي استخدمناها في حالة مقارنة متوسطين ، والتي درسناها في فصلين سابقين . وهكذا نجد في الصورة مجموع المربعات حول المتوسط ضمن كل من العينات الـ k ، وفي المخرج نجد $n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k$ ، وفي حالة تساوي حجوم العينات أي $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = n$ نجد في المخرج $nk - k = (n-1)k$ وهكذا يكون التقدير الذي نحصل عليه بهذه الطريقة هو :

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=2}^{n}(x_{i2} - \bar{x}_2) + \cdots + \sum_{i=1}^{n}(x_{ik} - \bar{x}_k)^2}{k(n-1)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{k(n-1)} \qquad (13)$$

ولكن الكمية في الصورة هي SEE وهكذا نكتب :

$$S_p^2 = \frac{SSE}{k(n-1)} \qquad (14)$$

٢ ـ ويمكن الحصول على التقدير الآخر لِـ σ^2 بأن ننظر إلى العينات الـ k على أنها مسحوبة ، وفقاً للفرضية التي انطلقنا منها ، من نفس المجتمع . ومتوسطات هذه العينات $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ تمثل k من القياسات التي افترضها متحول $\bar{x}$ تشتته هو $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/n$ ، تماماً كما رأينا في الجدول (٦ ـ ١) في الجزء الأول الذي يحوي عينات من مجتمع قذف قطعة زهر . وتمثل القيم $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ إذن عينة حجمها k من المجتمع الذي يمثل كل القيم الممكنة لِـ $\bar{x}$ (متوسط عينة حجمها n نسحبها من المجتمع المدروس) .

وتشتت هذه العينة من المتوسطات هو :

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_j - \bar{x})^2}{k-1}$$

وهو تقدير لِـ $\frac{\sigma^2}{n}$ وهكذا نجد التقدير الآخر لِـ σ^2 على أنه $n S_{\bar{x}}^2$ وسنرمز له بِـ S_t^2 أي أن :

$$S_t^2 = \frac{n\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_j - \bar{x})^2}{k-1} \quad (15)$$

ولكن الصورة في هذه العلاقة هي SST وهكذا نكتب التقدير الثاني المستقل لِ σ^2 على الشكل :

$$S_t^2 = \frac{SST}{k-1} \quad (16)$$

وتتألف طريقة تحليل التشتت من مقارنة هذين التقديرين المستقلين لِ σ^2. وباعتبارهما تقديران لنفس الكمية فإن نسبتهما يجب ألا تختلف كثيراً عن الواحد . وفي الحقيقة يُبرهن في الاحصاء الرياضي على ما يلي :

إذا كررنا مثل هذه التجربة ، أي أخذنا k عينة حجم كل منها n من مجتمع طبيعي ، عدداً كبيراً من المرات ، وحسبنا في كل مرة النسبة S_t^2 / S_p^2 حيث S_t^2 و S_p^2 معرفان بالعلاقتين (16) و (14) على الترتيب ، فإن التوزيع الإحتمالي لهذه النسبة يتبع التوزيع F (المعرف في الفقرة ٦ ـ ٦) بِـ $\nu_1 = k - 1$ و $\nu_2 = k\ (n-1)$ درجة من الحرية .

والجدير بالملاحظة هو أن مجموع درجات الحرية الموافقة لِ S_t^2 وهو $(k-1)$ ، وعدد درجات الحرية الموافقة لِ S_p^2 وهو $k\ (n-1)$ ، يساوي $(k-1) + k\,(n-1) = kn-1$ ، وهو عدد درجات الحرية الموافقة للعدد الكلي للقياسات التي تحويها التجربة . وهكذا نجد أن تحليل أو تفكيك التشتت يرافقه تفكيك موافق لعدد درجات الحرية .

والآن إذا لم تكن فرضيتنا صحيحة ، أي اذا كانت العينات الـ k مأخوذة في الحقيقة من مجتمعات تختلف في متوسطاتها ، فإن S_t^2 ستختلف كثيراً عن S_p^2 نظراً للتشتت الأوسع لمتوسطات العينات حول المتوسط الإجمالي . وإذا كان S_t^2 كبيراً بالمقارنة مع S_p^2 فإن قيمة النسبة F الناتجة ستتجاوز $F_{1-\alpha}$ ، وعندها سنرفض الفرضية ، ونستنتج أنه يوجد على الأقل زوج من

المتوسطات $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ تختلف عن بعضها إختلافا لا يمكن إهماله . ولنلاحظ أننا نصل إلى إستنتاج وجود فروق هامة بين المتوسطات ، فقط في الحالة التي يكون فيها S_t^2 أكبر من S_p^2 ، أي اذا كانت النسبة $F=S_t^2/S_p^2$ تتجاوز الواحد ، وهكذا فإننا نستخدم على الدوام إختباراً وحيد الذيل في تحليل التشتت . وعندما يكون S_t^2 أقل من S_p^2 نصل سلفاً إلى قبول الفرضية ، وليس من الضروري أن نحسب النسبة F أو نعقد مقارنة مع F_α .

ولاختبار الفرضية $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k$ بطريقة تحليل التشتت نقوم بالخطوات التالية :

١ ـ نحسب حد التصحيح : $C = \frac{T^2}{kn}$

٢ ـ نحسب مجموع المربعات الكلي $SS = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} X_{ij}^2 - C$

٣ ـ نحسب مجموع مربعات المعالجات (ما بين المتوسطات)
$SST = \frac{\sum_{i=1}^{k} T_i^2}{n} - C$

٤ ـ نحسب مجموع مربعات الخطأ $SSE = SS - SST$

٥ ـ نحسب عدد درجات الحرية الموافق لكل من مجاميع المربعات السابقة .

٦ ـ نحسب $S_t^2 = \frac{SST}{k-1}$. ونرمز لهذه الكمية عادة بِـ MST .

٧ ـ نحسب $S_p^2 = \frac{SSE}{k(n-1)}$. ونرمز عادة لهذه الكمية بِـMSE.

٨ ـ نحسب النسبة $F = MST/MSE$

٩ ـ نقارن القيمة الناتجة لِـ F مع $F_{1-\alpha}(k-1, k(n-1))$ كما نجدها من جدول التوزيع F ونرفض الفرضية إذا كانت F أكبر من $F_{1-\alpha}$ وذلك عند مستوى الأهمية α .

ونلخص هذه الخطوات عادة في جدول يسمى جدول تحليل التشتت وذلك على الشكل التالي :

جدول ١١ ـ ٣ تحليل التشتت في حالة عينات متساوية الحجم

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	F
ما بين العينات (أو المعالجات)	$SST = \frac{\sum^{k} T_{j}^{2}}{n} - C$	$k-1$	$MST = \frac{SST}{k-1}$	
ما ضمن العينات (أو الخطأ)	$SSE = SS - SST$	$k(n-1)$	$MSE = \frac{SSE}{k(n-1)}$	$\frac{MST}{MSE}$
المجموع	$SS = \sum\sum x_{ij}^{2} - C$	$kn-1$		

١١ ـ ٤ **التصميم التام العشوائية** : يبرز التصميم التام العشوائية من الطريقة التي نخطط فيها تجربة من تجارب التصنيف الأحادي . فلنفرض أن لدينا خمسة أنواع من الأسمدة ونرغب في إختبار الفرضية الإبتدائية بعدم وجود فرق بين تأثيرات هذه الأسمدة على إنتاج الذرة الصفراء . وسنفرض أنه تتوفر لنا 20 وحدة تجريبية متجانسة بالنسبة لمختلف الشروط التي تؤثر في الإنتاج . والطريقة السليمة لتخصيص كل سماد لأربع من هذه الوحدات التجريبية (قطع أرض صغيرة) هو أن تتم عملية التخصيص هذه بصورة عشوائية . ويمكن إتمام ذلك بترقيم الوحدات التجريبية من واحد إلى عشرين . ثم نضع عشرين قطعة صغيرة من الورق في قبعة ، مثلاً ، وعلى كل أربع منها علامة توافق أحد الأسمدة الخمسة (رقم أو لون أو كتابة اسم السماد) . ونخلط هذه الأوراق جيداً ثم نسحب بصورة عشوائية واحدة منها فتحدد لنا نوع السماد الذي سنطبقه في الوحدة التجريبية الأولى ونسحب الثانية فتحدد السماد الذي سنطبقه في الوحدة التجريبية الثانية ، وهكذا . وفي مثل هذه الحالة نقول أننا نصمم التجربة وفق التصميم التام العشوائية ، بإعتبار أنه يمكن تخصيص أي معالجة لأي من الوحدات التجريبية المتوفرة . وبعد إنجاز التجربة عملياً ، نحصل أخيراً على إنتاج الذرة الصفراء من كل من الوحدات التجريبية العشرين . ولو أننا خصصنا للأسمدة المختلفة أعداداً مختلفة من قطع الورق العشرين في القبعة ، لحصلنا على خطة للتجربة لا نطبق فيها كلاً من الأسمدة الخمسة على نفس العدد من الوحدات التجريبية ، وهذا يوافق ما سميناه أعلاه بحالة عينات غير متساوية الحجم .

مثال ٧ : لنفرض أن أرقام الإنتاج في التجربة المذكورة أعلاه ، وهي إختبار فعالية خمسة أنواع من الأسمدة في إنتاج الذرة الصفراء ، كانت كما يلي :

جدول ١١ـ٤ إنتاج عشرين وحدة تجريبية عولجت بخمس أنواع من الأسمدة

	1	2	3	4	5	
	40	38	44	41	34	
	45	40	42	43	35	
	46	38	40	40	34	
	49	44	34	40	33	
المجموع الكلي	180	160	160	164	136	800

باتباع الخطوات المذكورة أعلاه في الفقرة (١١ـ٣) نجد بإعتبار $n = 4$ و $k = 5$ أن:

١ ـ $$C = \frac{T^2}{nk} = \frac{(800)^2}{20} = 32000$$

٢ ـ $$SS = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} x_{ij}^2 - C = (40)^2 + (45)^2 + \ldots$$
$$+ (33)^2 - 32000 = 32378 - 32000 = 378$$

٣ ـ $$SST = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{5} T_j^2 - C = \frac{1}{4} [(180)^2 + (160)^2 + (160)^2$$
$$+ (164)^2 + (136)^2] - C = 32248 - 32000 = 248$$

٤ ـ $$SSE = SS - SST = 378 - 248 = 130$$

ويكون جدول تحليل التشتت كما يلي :

جدول ١١ـ٥ تحليل التشتت للتجربة المعطاة في الجدول ١١ ـ ٤ .

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F
ما بين الأسمدة	4	248	62	
الخطأ	15	130	8.67	$\frac{62}{8.67} = 7.15$
المجموع	19	378		

ولإختبار الفرضية بأن $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_5$ عند المستوى $\alpha = .01$ نقارن F بـ $F_{.01}(4,15) = 4.89$. وبما أن $F > F_{.01}$ فإننا نرفض الفرضية عند المستوى $\alpha = .01$. ونستنتج وجود فروق بين تأثيرات الأسمدة الخمسة في الإنتاج .

ولظروف تتعلق بالتجربة وطبيعة المعالجات ، فقد تكون حجوم العينات الـ k غير متساوية . وفي هذه الحالة يصبح جدول تحليل التشتت كما هو مبين في الجدول (١١-٦) .

حيث حد التصحيح C هو $C = T^2 / \sum_{j=1}^{k} n_j$

مثال ٨ : لنفرض أننا نريد مقارنة تأثير أربعة أنواع من الأسمدة على إنتاج القمح وكان الإنتاج محسوباً بالبوشل / إيكر كما هو مبين في الجدول (١١-٧) .

جدول ١١ـ٦ تحليل التشتت في حالة عينات غير متساوية الحجوم .

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F
ما بين المعالجات	$k - 1$	$SST = \sum^{k} \frac{T_j^2}{n_j} - C$	$MST = \frac{SST}{k-1}$	
الخطأ	$\sum^{k} (n_j - 1)$	SSE	$MSE = \frac{SSE}{\sum(n_j - 1)}$	
المجموع	$\sum^{k} n_j - 1$	$SS = \sum^{k} \sum^{k} X_{ij}^2 - C$		

جدول ١١ـ٧ نتائج التجربة في المثال ٨ .

السماد

	1	2	3	4
	45	35	34	41
	46	33	34	41
	49		35	44
	44		34	43
			33	41
				42
				44
				41
				41
المجموع الكلي 800	184	68	170	378

وباتباع نفس الخطوات المذكورة أعلاه حيث $n_1 = 4$ ، $n_2 = 2$ ، $n_3 = 5$ ، $n_4 = 9$ ، $k = 4$ ، نجد :

١ - $$C = T^2/\sum_{j=1}^{4} n_j = \frac{(800)^2}{20} = 32000$$

٢ - $$SS = \sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}^2 - C = (45)^2 + (46)^2 + \ldots + (41)^2 - C = 32464 - 32400 = 464$$

$$SST = \sum_{j=1}^{4} \frac{T_j^2}{n_j} - C = \frac{(184)^2}{4} + \frac{(68)^2}{2} + \frac{(170)^2}{5} + \frac{(378)^2}{9} - C = 32432 - 32000 = 432$$

٤ - $$SSE = SS - SST = 464 - 432 = 32$$

ويكون جدول تحليل التشتت هو :

جدول ١١ ـ ٨ تحليل التشتت للتجربة المعطاة في الجدول ١١ ـ ٧

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F
ما بين الأسمدة	3	432	144	
الخطأ	16	32	2	$\frac{144}{2} = 72$
المجموع	19	464		

ولاختبار الفرضية بأن $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ ، أي أنه لا فرق بين تأثيرات الأسمدة الأربعة على إنتاج القمح ، عند المستوى $\alpha = .01$، نقارن F كماحسبناها من الجدول(١١ـ٨) بـ $F_{.01}\ (3,16) = 5.29$ وبما أن $F > F_{.01}$ فإننا نرفض الفرضية عند المستوى $\alpha = .01$ (وهذا يعني أننا نرفضها حكماً عند المستوى $\alpha = .05$) .

١١ ـ ٥ **الفروض القائمة وراء طرق تحليل التشتت** : بما أن للفهم الواضح للشروط المختلفة التي تعتمد عليها طرق تحليل التشتت ، أهميته القصوى في مجال تفسير المعلومات التجريبية ، وتفسير نتائج التحليل وفي مجال التطبيق السليم لهذه الطرق ، فإننا سنلقي فيما يلي نظرة فاحصة على مثل هذه الشروط ، التي يجب أن ندرك بأنها ضرورية ، حتى يكون تحليلنا دقيقاً ، وحتى يكون من الممكن أن تترافق الاستقراءات التي نقوم بها بعبارات إحتمالية تحدد مدى الثقة بهذه الاستقراءات . وبالطبع فإن مثل هذه الفروض يجب أن تكون من طبيعة رياضية . وسنتطرق هنا للنموذجين I و II في حالة تصنيف أحادي ، ويمكن تعميمها بسهولة إلى حالات تصنيف ذي بعدين أو أكثر . أي أننا سنفترض هنا أننا نهتم بتقدير أو اختبار تأثيرات عامل واحد فقط ، وكل العوامل الأخرى يشملها الحد الذي نسميه حد « الخطأ » ،

والذي يتضمن كل مصادر التغير التي تقع خارج حدود العامل المدروس .

النموذج I ـ نفترض ما يلي :

١ ـ الملاحظات x_{ij} هي القيم الملحوظة لمتحولات عشوائية تتوزع حول متوسط ξ_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$

٢ ـ يمكن التعبير عن كل وسيط (وهو عدد ثابت) على الشكل :

$$\xi_j = \mu + \alpha_j \qquad (17)$$

وهي خاصة التجميعية حيث :

$$\mu = \frac{\sum_{j=1}^{k} \xi_j}{k} \quad , \quad \alpha_j = \xi_j - \mu$$

وهكذا يكون :

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 0 \qquad (18)$$

٣ ـ للمتحولات العشوائية x_{ij} نفس التشتت σ^2 (خاصة التجانس) .

٤ ـ تتوزع المتحولات x_{ij} ، مستقلة عن بعضها ، وفق التوزيع الطبيعي .

ويمكن التعبير عن هذه الخواص باختصار كما يلي : يمكن التعبير عن الملاحظات وفقاً للنموذج الرياضي :

$$x_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n, \\ j = 1, \ldots, k. \end{array} \qquad (19)$$

حيث μ و α_j أعداد ثابتة وحيث : $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 0$

والمتحولات ε_{ij} هي متحولات عشوائية مستقلة فيما بينها ويتوزع كل منها وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وبتشتت مشترك σ^2 ، وتحت هذه الشروط يصبح تطبيق طرق تحليل التشتت لتقدير وإختبار أهمية تأثيرات « المعالجات » أمراً مشروعاً بالإضافة إلى أنه يمكن وضع مقاييس لمدى الثقة بالاستقراءات التي نستخلصها من هذا التحليل .

النموذج II ـ مركبات التشتت ـ نفترض ما يلي :

١ ـ الملاحظات X_{ij} ($i = 1, ..., n; j = 1, ..., k$) هي القيم الملحوظة لمتحولات عشوائية تتوزع حول متوسط يساوي μ .

٢ ـ كل متحول عشوائي x_{ij} هو مجموع مركبتين عشوائيتين (أي متحولين عشوائيين) والعلاقة التابعية بين x_{ij} وهذه المركبات هي :

$$x_{ij} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$$

حيث α_j و ε_{ij} هما متحولان عشوائيان .

٣ ـ يتوزع المتحولان العشوائيان α_j و ε_{ij} وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر ، ولكن بتشتتين هما ، على الترتيب ، σ_α^2 و σ^2

٤ ـ المتحولات α_j ، ($j = 1, ..., k$) و ε_{ij} ($i = 1, ..., n; j = 1, ..., k$) هي متحولات مستقلة فيما بينها ، وتتوزع وفق التوزيع الطبيعي .

وبصورة عامة نقول أن شروط : التوزع الطبيعي ، التجميعية ، الاستقلال ، والتجانس تشكل الأساس الذي تقوم عليه الطرق الإحصائية العامة التي يستخدمها الباحثون العلميون .

وقد دُرست التأثيرات الناتجة عن عدم تحقق هذه الشروط تماماً من قبل كوكران وآخرون ، فوجدوا أن انحرافاً معتدلاً عن هذه الشروط سوف لا يثير صعوبات جدية ، ولكن اذا كانت هذه الإنحرافات كبيرة فيجب أن ننظر بعين الحذر للتحليل وللنتائج المستخلصة . وبعبارات أوضح نقول إن أكثر ما يسبب الصعوبات الجدية في طريق التحليل هو:أن يكون توزيع المتحولات بعيداً جداً عن التناظر ، تواجد الأخطاء بحجم كبير (سواء أكان الخطأ ناتجاً عن عدم دقة القياسات ، أو إغفال عوامل مؤثرة في النتائج لم يأخذها المجرب بعين الإعتبار ، أو إختيار التصميم غير المناسب للتجربة) ، ابتعاد النموذج الرياضي عن الشكل التجميعي ، والتغيرات في تشتت الخطأ ،

أي عدم التجانس ، (سواء أكان ذلك ناشئاً عن المتوسط أو عن معالجات بعينها ، أو من أجزاء من التجربة) . وأفضل الطرق لتحسين الوضع هو حذف بعض الملاحظات أو المعالجات أو تكرارات التجربة ، تجزئة خطأ التشتت ، أو التحويل إلى سلم قياس آخر قبل الشروع في التحليل . وعلى أي حال فإن إختيار الطريقة الأدق تتطلب خبرة كبيرة في طرق تحليل التشتت المتعددة . وسيكون من المستحسن غالباً أن يعود المجرب في مثل هذه الحالات إلى إختصاصي في الإحصاء الرياضي .

١١ ـ ٦ **اختبار « بارتلت » من أجل تجانس التشتتات** : سنتوقف هنا قليلاً لإعطاء إختبار هام نستطيع بواسطته الحكم على مدى إنسجام البيان الإحصائي المطلوب تحليله مع خاصة التجانس المذكورة في الفقرة السابقة . فقد توصل « بارتلت » إلى طريقة لإختبار الفرضية $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2$ حيث $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ هي تشتتات المجتمعات الـ k التي تهدف طريقة تحليل التشتت إلى مقارنة متوسطاتها . وذلك باستخدام k عينة ، واحدة من كل من هذه المجتمعات ، أحجامها بصورة عامة $n_1, n_2, \dots, n_k$. ولنتذكر أن هذه المجتمعات هي بالفرض مجتمعات طبيعية . ونلخص الطريقة في الجدول (١١ـ ٩) الذي نستنتج منه قيمة χ^2 ثم نقارن هذه القيمة مع χ_α^2 بـ $(k-1)$ درجة من الحرية كما نجده من جدول التوزيع χ . ونرفض الفرضية H_0 اذا كان $\chi^2 > \chi_\alpha^2$ ونستنتج في هذه الحالة أن المعلومات المطلوب تحليلها لا تحقق خاصة التجانس . وسيجد الباحث أنه من الضروري أن نحسب القيمة المصححة لِ χ ، فقط في الحالة التي تتجاوز فيها قيمة χ^2 غير المصحح الكمية χ_α^2 وتكون بنفس الوقت قريبة منها ، أي أن مقدار التجاوز طفيف من جهة ، ويرغب المجرب في الحصول على تقييم دقيق لحجم الخطأ من النوع الأول α من جهة أخرى .

جدول ١١ـ ٩ حسابات اختبار « بارتلت » الخاص بتجانس التشتتات

العينة	مجموع مربعات العينة	درجات الحرية	مقلوب درجات الحرية	S^2_j متوسط المربعات	$\log_{10} S^2_j$	(درجات الحرية) X ($\log_{10} S^2_j$)
1	$\sum_{i=1}^{n_1} X^2_{ij} - \frac{T_1^2}{n_1}$	$n_1 - 1$	$1/(n_1 - 1)$	S^2_1	$\log_{10} S^2_1$	$(n_1 - 1) . \log_{10} S^2_1$
2	$\sum_{i=1}^{n_2} X^2_{ij} - \frac{T_2^2}{n_2}$	$n_2 - 1$	$1/(n_2 - 1)$	S^2_2	$\log_{10} S^2_2$	$(n_2 - 1) . \log_{10} S^2_2$
.....						
k	$\sum_{i=1}^{n_k} X^2_{ij} - \frac{T_k^2}{n_k}$	$n_k - 1$	$1/(n_k - 1)$	S^2_k	$\log_{10} S^2_k$	$(n_k - 1) . \log_{10} S^2_k$
المجموع	W_{yy}	$\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)$	$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j - 1}$	- - -	- - -	$\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \log_{10} S^2_j$

التقدير المركب للتشتت من جميع العينات = $S^2 = \dfrac{W_{yy}}{\sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)}$

$$B = (\log_{10} S^2) \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)$$

$$\chi^2(k-1) = \log_e 10 \left[B - \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \log_{10} S_j^2 \right] \qquad (20)$$

عامل التصحيح $C = 1 + \dfrac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{j=1}^{k} \dfrac{1}{n_j - 1} - 1 / \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) \right]$

مصحح $\chi^2(k-1) = \dfrac{1}{C} \chi^2(k-1)$ لاحظ أن $\log_e 10 = 2.3026$

وللتأكد من قدرة القارئ على استخدام الرموز في الجدول (١١ـ٩) نأخذ المثال العددي المبين في الجدول (١١ـ١٠) . ونتائج الحسابات الضرورية مبينة في الجدول (١١ـ١١) ونرى أننا لا نستطيع رفض الفرضية بأن التشتتات متجانسة . ويلاحظ القارئ أنه لا ضرورة في هذا المثال لحساب χ^2 المصحح . ومع هذا فقد قمنا بالحسابات فقط ليكون المثال كاملاً .

جدول ١١ ـ ١٠ أربع عينات من مجتمعات طبيعية

A	B	C	D
48	42	33	78
49	39	42	69
67	51	46	60
75	57	47	52
53	75	50	63
33			45
			50
			35

جدول ١١ـ١١ حسابات إختبار « بارتلت » للبيان الإحصائي في الجدول ١١ـ١٠

العينة	مجموع مربعات العينة	درجات الحرية	مقلوب درجات الحرية	s_i^2	$bog_{10}\ s_i^2$	درجات الحرية x $(log_{10}\ s_i^2)$
1	1113.0	5	.20	222.6	2.34753	11.73765
2	820.8	4	.25	205.2	2.31218	9.24872
3	173.2	4	.25	43.3	1.63649	6.54596
4	1330.0	7	.1428	190.0	2.27875	15.95125
المجموع	3437.0	20	.8428	. . . . .	. . . . .	43.48358

$$171.85 = \frac{3737}{20} = S^2 = \text{التقدير المركب للتشتت}$$

$$B = (\log_{10} S^2) \sum_{j=1}^{4} (n_j - 1) = (2.23515)\ (20) = 44.7030$$

$$\chi^2(3) = (2.3026)\ (44.7030 - 43.48358) = 2.80784$$

عامل التصحيح : $C = 1 + \frac{1}{3\ (3)} (.8428 - \frac{1}{20}) = 1.0881$

المصحح $\chi^2(3) = \frac{2.80784}{1.0881} = 2.5805$

١١ ـ ٧ توقع متوسط المربعات في التصميم التام العشوائية : قبل اختبار أية فرضية تتعلق بتأثير « معالجات » عند تحليل بيان احصائي ، فإن شروطاً معينة يجب أن تتوفر وهي الشروط التي ذكرناها في الفقرة (١١ ـ ٥) . وفي حالتنا الخاصة في المثال ، إذا سمينا الأسمدة بالمعالجات فيمكن كتابة النموذج الرياضي على الشكل :

$$x_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij}$$

$$i = 1, \ldots, n_j$$
$$j = 1, \ldots, 4$$

حيث τ_j هو التأثير الحقيقي للمعالجة j ، والمتحولات ε_{ij} تتوزع مستقلة فيما بينها وفق التوزيع الطبيعي ، بمتوسط يساوي الصفر ، وتشتت مشترك يساوي σ^2 . وعلى هذا الأساس لنستعرض الآن ما تصبح علية عبارة مجموع مربعات المعالجات ومجموع مربعات الخطأ فنجد :

$$SSE = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{n_j} \left[(\mu + \tau_j + \varepsilon_{ij}) - (\mu + \tau_j + \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \varepsilon_{ij}}{n_j}) \right]^2 \quad (21)$$

$$= \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{n_j} (\varepsilon_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \varepsilon_{ij}}{n_j})^2$$

وبما أن نتائج التجربة هي مجرد عينة من مجتمع كل النتائج الممكنة فيما لو كررنا التجربة بدون توقف ، فمن الطبيعي أن نتساءل عن قيمة التوقع أو ما يسمى بالتوقع الرياضي لمجموع مربعات الخطأ . وبالاستناد إلى الفرض

بأن المتحولات ε_{ij} مستقلة ، وتتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت مشترك يساوي σ^2 ، يمكن البرهان على العلاقة العامة التالية :

$$E(SSE) = E\left[\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2\right] \tag{22}$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left[E\left(\varepsilon_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^{n_j}\varepsilon_{ij}}{n_j}\right)^2\right] = \sigma^2\sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)$$

وهكذا فإن توقع متوسط مربعات الخطأ هو :

$$E(MSE) = E\left(\frac{SSE}{\sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)}\right) = \sigma^2 \tag{23}$$

وهذا يعني أن متوسط مربعات الخطأ هو تقدير منصف للتشتت σ^2 . وعندما تكون حجوم العينات متساوية أي $n_j = n$ من أجل $j = 1, 2, \ldots, k$ تصبح العلاقة (22) كما يلي :

$$E(SSE) =$$
$$= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left[E\left(\varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{1j} + \varepsilon_{2j} + \cdots + \varepsilon_{nj}}{n}\right)^2\right] = k(n-1)\sigma^2 \tag{24}$$

وبصورة مشابهة نجد من مجموع مربعات المعالجات SST ، وباعتبار $N = \sum_{j=1}^{k} n_j$ ما يلي :

$$SST = \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_j - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{j=1}^{k} n_j\left[\left(\mu + \tau_j + \frac{\sum_{i=1}^{n_j}\varepsilon_{ij}}{n_j}\right) - \left(\mu + \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j\tau_j}{N} + \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\varepsilon_{ij}}{N}\right)\right]^2 \tag{25}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} n_j\left[\left(\tau_j - \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j\tau_j}{N}\right) + \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_j}\varepsilon_{ij}}{n_j} - \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\varepsilon_{ij}}{N}\right)\right]^2 \tag{25}$$

وقبل حساب توقع هذه الكمية لا بد أن نقرر النموذج الذي نتبناه أهو النموذج I حيث نعتبر المقادير τ_j أعداداً ثابتة أو النموذج II حيث نعتبر المقادير τ_j متحولات عشوائية تشتتها σ_τ^2 . وسنستعرض كلي الحالتين لنرى أين تقع نقاط الخلاف في التحليل :

النموذج I :

لنفرض أن :

$$\sum_{j=1}^{k} n_j \tau_j = 0 \qquad (26)$$

وهذا الشرط يقابله في حالة عينات متساوية كما رأينا الشرط: $\sum_{j=1}^{k} \tau_j = 0$
الناتج عن تعريف τ_j بالذات . ويمكن أن نبين في هذه الحالة أن :

$$E(SST) = \sum_{j=1}^{k} n_j \tau_j^2 + (k-1)\sigma^2$$

ومنه يكون توقع متوسط مربعات المعالجات MST :

$$E(MST) = E\left(\frac{SST}{k-1}\right) = \sigma^2 + \frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k} n_j \tau_j^2 \qquad (27)$$

وتصبح هذه النتيجة في حالة عينات متساوية الحجم : $E(MST) =$

$$= \sigma^2 + \frac{n}{k-1}\sum_{j=1}^{k} \tau_j^2$$

النموذج II :

إذا اعتبرنا τ_j متحولات مستقلة فيما بينها ويتوزع كل منها وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ_τ^2 ، فعندئذ يمكن برهان النتيجة التالية :

$$E(SST) = (k-1)\sigma^2 + \left[N - \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j^2}{N}\right]\sigma_\tau^2 \qquad (28)$$

وقد فرضنا هنا أن المتحولات τ_j مستقلة عن المتحولات ε_{ij} من أجل جميع قيم i و j . وهكذا نجد :

$$E(MST) = E\left(\frac{SST}{k-1}\right) = \sigma^2 + n_0 \sigma_\tau^2 \qquad (29)$$

حيث :

$$n_0 = \frac{1}{k-1}\left(N - \sum_{j=1}^{k} n_j^2 / N\right) \qquad (30)$$

وتصبح هذه النتائج في حالة عينات متساوية الحجم : $n_0 = n$

$$E(MST) = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2 \qquad (31)$$

ونعيد الآن كتابة الجدول (١١- ٦) مع إضافة عمودين أحدهما لتوقع متوسط المربعات في حالة النموذج I والآخر لتوقع متوسط المربعات في حالة النموذج II . ونحصل بذلك على الجدول (١١-١٢) .

جدول ١١-١٢ تحليل التشتت في حالة عينات غير متساوية الحجم

مصدر التشتت	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F	توقع متوسط المربعات النموذج I	توقع متوسط المربعات النموذج II
ما بين المعالجات	$k-1$	SST	$MST=\frac{SST}{k-1}$	$\frac{MST}{MSE}$	$\sigma^2+\frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k} n_j \tau_j^2$	$\sigma^2+n_0\sigma_\tau^2$
الخطأ	$\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)$	SSE	$MSE=\frac{SSE}{\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)}$		σ^2	σ^2
المجموع	$\sum_{j=1}^{k} n_j-1$	SS				

والجدول ١١ ـ ٨ المتعلق بالمثال ٨ يصبح على الشكل التالي علماً أن $n_0=4.57$:

جدول ١١ـ١٣ تحليل التشتت للتجربة في المثال ٨

مصدر التشتت	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	F	توقع متوسط المربعات النموذج	توقع متوسط المربعات النموذج
ما بين الأسمدة	3	432	144		$\sigma^2+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4} n_j \tau_j^2$	$\sigma^2+4.57\,\sigma_\tau^2$
الخطأ	16	32	2	72	σ^2	σ^2
المجموع	19	464				

ولنذكر أننا في كلي المثالين ٧ و ٨ افترضنا أن للمجتمعات الـ k التي نقارنها $k=5$ في المثال ٧ و $k = 4$ في المثال ٨) نفس التشتت σ^2 وهو ما سميناه بخاصة التجانس . وهذه الخاصة هي التي تمكننا من تركيب تشتتات العينات الـ k وهي $S_1^2, \ldots S_k^2$ للحصول على تقدير مركب S^2 للتشتت المشترك σ^2 . هذا التقدير المركب S^2 هو الذي دعيناه في جدول تحليل التشتت بمتوسط مربعات الخطأ MSE

٨ـ١١ إختبار الفرضيات في التصميم التام العشوائية : نعرض الفرضيات هنا بدقة أي بعبارات رياضية يمليها النموذج الرياضي الذي فرضناه . وهكذا نكتب الفرضية في المثال ٨ على الشكل :

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$$

وذلك من أجل النموذج I . وهذا يكافئ كتابة :

$$H_0 : n_1\tau_1^2 + n_2\tau_2^2 + n_3\tau_3^2 + n_4\tau_4^2 = 0$$

وبالطبع فإن الشرط اللازم والكافي ليكون $\sum_{j=1}^{4} n_j \tau_j^2 = 0$ هو أن يكون كل من $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ مساوياً للصفر ، ومن أجل النموذج II نكتب الفرضية على الشكل :

$$H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$$

وتعني هذه الفرضية أنه لا توجد فروق بين متوسط تأثيرات معالجات الأسمدة الأربعة على إنتاج القمح . أو بعبارة أخرى نقول أن متوسطات المجتمعات الأربعة متساوية ، ذلك لأن :

$$E(x_{ij}) = E(\mu + \tau_j + \varepsilon_{ij}) = \mu + \tau_j \quad , \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n_j \\ j = 1, \ldots, 4 \end{matrix}$$

وإذا كانت الفرضية H_0 صحيحة فإن $E(x_{ij}) = \xi_j = \mu$ حيث ξ_j هو متوسط

المجتمع الموافق للمعالجة i ، وبالتالي فإن $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \mu$ وهو الشكل الذي عرضناه ، في البداية ، للفرضية التي تهدف طريقة تحليل التشتت لإختبارها .

ويؤدي النموذجان I و II إلى نفس الإختبار لِ H_0 في مثالناهنا ، ولذلك سنناقشهما معاً . وسوف لا يكون الأمر كذلك دائماً على أي حال .

وبالعودة إلى الجدول (١١–١٣) نجد أن متوسط مربعات « ما بين الأسمدة » هو تقدير منصف للمقدار $\sigma^2 + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4} n_j \tau_j^2$ (تحت النموذج I)، أو تقدير منصف لِ $\sigma^2 + 4.57\sigma_\tau^2$ (تحت النموذج II) ، بينما يشكل متوسط مربعات الخطأ MSE تقديراً منصفاً لِ σ^2 . ويمكن البرهان على أن توزيع الكمية :

$$\frac{SSE}{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) s^2}{\sigma^2} \qquad (32)$$

هو التوزيع χ^2 بِـ $\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)$ درجة من الحرية . وهذه الظاهرة ، وهي صحيحة بصرف النظر عن الفرضية التي نضعها حول تأثيرات المعالجات ، تشجّع على تأمل النسبة المقابلة من أجل مجموع مربعات « ما بين المعالجات » أي النسبة :

$$\frac{SST}{\sigma^2 + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{4} n_j \tau_j^2} \qquad (33)$$

أو

$$\frac{SST}{\sigma^2 + n_0 \sigma_\tau^2} \qquad (34)$$

وفقاً لحالة النموذج I أو النموذج II على الترتيب . ونُبرهن في الإحصاء

النظري أن الكميتين SST و SSE مستقلتان . لنشكل الآن النسبتين :

$$\frac{SST/(\sigma^2 + \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j \tau_j^2}{k-1})(k-1)}{SSE/\sigma^2 \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)} \quad (35)$$

$$\frac{SST/(\sigma^2 + n_0 \sigma_\tau^2)(k-1)}{SSE/\sigma^2 \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)} \quad (36)$$

وفقاً لحالتي النموذج I أو النموذج II على الترتيب . ومن سوء الحظ فإننا لا نعلم قيم σ^2 ، σ_τ^2 أو τ_j $(j = 1, 2, ..., k)$. ولكن نلاحظ أنه اذا كانت الفرضية الإبتدائية صحيحة فإن كلاً من العلاقتين (35) و (36) تصبحان على الشكل :

$$F = \frac{SST/\sigma^2(k-1)}{SSE/\sigma^2 \sum_{j=1}^{k}(n_j-1)}$$

$$= \frac{SST/(k-1)}{SSE/\sum_{j=1}^{k}(n_j-1)} = \frac{MST}{MSE} \quad (37)$$

ويمكن البرهان على أن النسبة SST/σ^2 تتوزع ، علماً أن الفرضية الإبتدائية صحيحة ، وفق التوزيع χ^2 بـ(k–1) درجة من الحرية . وكما نذكر من الفقرة (٦ – ٦) فإن توزيع النسبة F في (37) هو التوزيع $F(\nu_1, \nu_2)$ حيث $\nu_1 = k-1$ و $\nu_2 = \sum_{j=1}^{k}(n_j-1)$ (وفي حالة تساوي العينات يكون $\nu_1 = k-1$ ، $\nu_2 = k(n-1)$) . وهكذا نستنتج أنه اذا كانت الفرضية الابتدائية صحيحة فإن توزيع النسبة F في تحليل التشتت هو توزيع سنيديكور أو التوزيع F وبالتالي يمكن استخدام هذه النسبة كإحصاء لإختبار الفرضية الإبتدائية H_0 .

ونلاحظ أن النسبة F في كلي المثالين ٧ و ٨ كانت بحيث رفضنا الفرضية

H_0. وبالطبع سيواجه المجرب حالات تكون فيها قيمة F بحيث لا نستطيع رفض H_0 . ولكن هب أننا حصلنا على قيمة لِ F أصغر من الواحد فهل نكتفي بالقول بأننا لا نستطيع رفض الفرضية H_0 أي نقبلها ؟ وفي الحقيقة فإن الاكتفاء بمثل هذا القول يتجاهل حالة هامة جداً . وقد نقول في مثل هذه الحالة أن التغيرات التي تنشأ من عينة إلى أخرى هي التي سببت المبالغة في تقدير توقع المخرج (أي تقدير σ^2)، وأنها على العكس بخست تقدير توقع الصورة حقه . ومع كون مثل هذا التعليل منطقياً ، فماذا نقول لو أن قيمة النسبة F كانت صغيرة إلى الحد الذي يصبح معه مقلوبها $F' = \frac{1}{F}$ أكبر من $F_{1-\alpha}(\nu_2, \nu_1)$ ؟ وبما أن مقلوب توزيع $F(\nu_1, \nu_2)$ هو التوزيع $F(\nu_2, \nu_1)$ فإنه يبدو وكأننا يجب أن نرفض شيئاً ما . ويبدو معقولاً أن نقول في مثل هذه الحالة أنه يجب أن نرفض النموذج الرياضي الذي اعتمدته التجربة ونبحث عن نموذج يتلاءم بشكل أفضل مع الظاهرة المدروسة .

١١ ــ ٩ إختبار درجات الحرية كل بمفردها :اذا احتوت التجربة k من المعالجات فيمكن تقسيم « مجموع مربعات المعالجات » إلى k−1 من الأجزاء كل منها مجموع مربعات ثم إختبار كل منها بمقارنتها مع متوسط مربعات الخطأ .

ولتوضيح الفكرة لنعد إلى البيان الإحصائي في المثال ٨ . ولنفرض أننا لاحظنا عند تخطيط التجربة وجود شبه كبير في تركيب كل من السمادين رقم 1 ورقم 2 ، ووجود شبه كبير أيضاً بين تركيبي السمادين رقم 3 ورقم 4 ، ولكن السمادين رقم 1 و 2 يختلفان اختلافاً بيّناً عن السمادين 3 و 4 . فيبدو من المنطقي أن نقيم مقارنة بين : (i) المعالجتين 1 و 2 في مقابل المعالجتين 3 و 4 (ii) المعالجة 1 في مقابل المعالجة 2 و (iii) المعالجة 3 في مقابل المعالجة 4 .

ونعرّف جبرياً المقارنة بين الكميات $W_1, ..., W_n$ (حيث W_i هو مجموع

r_i من الملاحظات) كما يلي :

$$c_i = c_{i1}\, w_1 + c_{i2}\, w_2 + \ldots + c_{in}\, w_n \qquad (38)$$

حيث :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j\, c_{ij} = 0 \qquad (39)$$

وإذا كان كل r_i مساوياً لِ r أي كانت المقادير $w_1, \ldots, w_n$ مجاميعاً لأعداد متساوية من الملاحظات ، فعندئذ يصبح الشرط الضروري لمقارنة على الشكل :

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = 0 \qquad (40)$$

ويمكن تمثيل المقارنات الثلاث بين المعالجات التي ذكرناها أعلاه كما يلي :

$$C_i = \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\, T_j$$

حيث :

$$\begin{aligned} C_1 &= (7)\,(184) + (7)\,(68) + (-3)\,(170) + (-3)\,(378) \\ C_2 &= (1)\,(184) + (-2)\,(68) + (0)\,(170) + (0)\,(378) \\ C_3 &= (0)\,(184) + (0)\,(68) + (9)\,(170) + (-5)\,(378), \end{aligned} \qquad (41)$$

و T_j ترمز كالمعتاد لمجموع المعالجة j .

ونلاحظ أن الأمثال هنا تحقق الشرط المطلوب ($r_1 = 4$ ، $r_2 = 2$ ، $r_3 = 5$ و $r_4 = 9$ كما نرى من البيان الإحصائي في الجدول ١١ـ٧) في العلاقة (39) .

ويمكن أن نتساءل هنا عن كيفية الحصول على الأمثال c_{ij} $(i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4)$ المستخدمة في المقارنات (41). ولنأخذ على سبيل المثال المقارنة C_1 وهي مقارنة بين متوسط ست ملاحظات (2+4) مع متوسط 14 ملاحظة (9+5). وبما أن المضاعف المشترك البسيط لِ 6 و 14 هو 42 ،

فإن التثقيلات الضرورية لمقارنة مجاميع أعداد غير متساوية من الملاحظات في المقارنة C_1 هي 7 و 3 . ويمكن إيجاد الأمثال في المقارنات الأخرى بنفس الطريقة .

لنحسب الآن مجاميع المربعات الموافقة للمقارنات الثلاث C_1 ، C_2 و C_3 بين المعالجات المذكورة في المثال ٨ فنجد :

$$C_1 \text{ مجموع مربعات المقارنة } = \frac{(T_1 + T_2)^2}{n_1 + n_2} + \frac{(T_3 + T_4)^2}{n_3 + n_4} - \frac{T^2}{\sum_{j=1}^{4} n_j}$$

$$= \frac{(184 + 68)^2}{6} + \frac{(170 + 378)^2}{14} - \frac{(800)^2}{20} = 34.3$$

$$C_2 \text{ مجموع مربعات المقارنة } = \frac{T_1^2}{n_1} + \frac{T_2^2}{n_2} - \frac{(T_1 + T_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{(184)^2}{4} + \frac{(68)^2}{2} - \frac{(252)^2}{6} = 192.0$$

$$C_3 \text{ مجموع مربعات المقارنة } = \frac{T_3^2}{n_3} + \frac{T_4^2}{n_4} - \frac{(T_3 + T_4)^2}{n_3 + n_4}$$

$$= \frac{(170)^2}{5} + \frac{(378)^2}{9} - \frac{(584)^2}{14} = 205.7$$

ونلاحظ أن $34.3 + 192.0 + 205.7 = 432$ وهو مجموع مربعات ما بين الأسمدة في الجدول (١١ ـ ٨) . ونلاحظ أنه كان يمكن حساب مجاميع المربعات هذه بالاستفادة من العلاقة :

$$\text{مجموع مربعات المقارنة} = \frac{C_i^2}{\sum_{j=1}^{4} n_j c_{ij}^2} \qquad (42)$$

ونلاحظ في المقارنات الثلاث C_1 C_2 و C_3 أنه لا يتحقق الشرط :

$$\sum_{j=1}^{n} r_i c_{ij} = 0 \qquad \text{(من أجل أي j)} \qquad (43)$$

فقط وإنما يتحقق أيضاً الشرط :

$$\sum_{j=1}^{n} r_j c_{ij} c_{kj} = 0 \quad (i \neq k) \qquad (44)$$

ونقول في هذه الحالة أن المقارنة C_i متعامدة مع المقارنة C_k.

وفي حالة عينات من نفس الحجم تكون $r_j = r$ من أجل جميع قيم j وتبقى العلاقات السابقة صحيحة مع التعديل الضروري للحالة الجديدة . ويصبح مثلاً شرط التعامد :

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} c_{kj} = 0 \quad (i \neq k) \qquad (45)$$

ولو لم تكن المقارنات الثلاث أعلاه متعامدة مثنى مثنى لما كان مجموع مجاميع مربعاتها مساوياً لمجموع مربعات المعالجات . ونؤكد على ضرورة صياغة المقارنات التي نريد اختبارها مقدماً وقبل تحليل البيان الإحصائي .

وفي المثال ٨ يمكن كتابة تحليل التشتت كما في الجدول (١١ـ١٤) . ونقوم بالإختبار F لكل مقارنة بالطريقة المعتادة . ونلاحظ أننا نرفض الفرضية الابتدائية في كل من المقارنات الثلاث . أي أن نتائج الإختبار F تشير إلى وجود فروق هامة ضمن كل من المقارنات الثلاث ، وهذا ما نعبر عنه بقولنا أن المقارنات الثلاث هامة . وربما كان هذا نتيجة لكون المعلومات الإحصائية التي نحللها معلومات مصطنعة . وكثيراً ما تسهم عملياً مقارنة أو أكثر في تشكيل مجموع مربعات المعالجات بينما يبقى ما تقدمه مقارنات أخرى صغيراً نسبياً ، مما يشير في مثل هذه الحالة الى المصادر الأكثر أهمية التي تسبب وجود فروق هامة بين المعالجات .

جدول ١١ـ١٤ تحليل تشتت المقارنات الثلاث المتعلقة بالبيان الإحصائي في الجدول ١١ـ٧

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
المعالجتان 1 و 2 مقابل المعالجتين 3 و 4	1	34.3	43.3	$\sigma^2 + \frac{\left[(n_3+n_4)(n_1\tau_1+n_2\tau_2)-(n_1+n_2)(n_3\tau_3+n_4\tau_4)\right]^2}{(n_1+n_2)(n_3+n_4)\sum_{j=1}^{4} n_j}$
المعالجة 1 مقابل المعالجة 2	1	192.0	192	$\sigma^2 + \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\tau_1-\tau_2)^2$
المعالجة 3 مقابل المعالجة 4	1	205.7	205.7	$\sigma^2 + \frac{n_3 n_4}{n_3+n_4}(\tau_3-\tau_4)^2$
الخطأ	16	32	2	σ^2
المجموع	19	464		

لنأخذ الآن مثالاً عن حالة عينات متساوية الحجم . فنعود إلى المثال ٧ ، والبيان الإحصائي في الجدول ١١ـ٧ . ولنفرض أننا نهتم بالمقارنات المبينة في الجدول (١١ـ١٥) . وأننا قررنا هذه المقارنات سلفاً أي قبل الإطلاع على نتائج التجربة .

جدول ١١ـ١٥ مقارنات بين المعالجات في المثال ٧

المقارنات	الأسمدة 1	2	3	4	5
C_1	−1	+4	−1	−1	−1
C_2	+1	0	+1	−1	−1
C_3	+1	0	−1	0	0
C_4	0	0	0	+1	−1

ويمكن أن نبدأ هنا بنفس الطريقة التي حللنا فيها المثال السابق . ولكن الحسابات هنا ستكون أسرع بكثير . فالمقارنة C_1 مثلاً هي :

$$(-1)\,(180) + (4)\,(160) + (-1)\,(160) + (-1)\,(164) + (-1)\,(136) = 0$$

ومجموع المربعات العائدة للمقارنة C_1 هو :

$$\text{مجموع مربعات المقارنة } C_1 = \frac{(0)^2}{20(4)} = 0$$

وبصورة مماثلة نجد أن :

$$\text{مجموع مربعات } C_2 = \frac{(40)^2}{4(4)} = 100$$

وهكذا . وبصورة عامة لدينا :

$$\bar{\bar{C}}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, w_i \qquad (46)$$

حيث w_j هي مجموع r من الملاحظات . ومجموع المربعات معطى ، بصورة عامة ، بالعلاقة :

$$\frac{C_i^2}{r\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_j\right)^2}{r\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2} \qquad (47)$$

وهي حالة خاصة من المعادلة (42) تكون فيها $r_j = r$ مهما كانت j . ونحصل هنا على تحليل التشتت المبين في الجدول (١١-١٦) .

ونلاحظ في هذا المثال أن ثلاثاً من المقارنات الأربعة تشكل كامل مجموع مربعات ما بين المعالجات ، وأن المقارنة الباقية ، وقد وُضعت قبل الاطلاع على نتائج التجربة أو قبل تنفيذها ، لم تقدم شيئاً البتة . ويجب ألا نفترض هنا أنه يمكن اللجؤ إلى الاختبار t لمقارنة ثنائية بين المعالجات بعد أن يكون الاختبار F قد أشار إلى وجود مثل هذه الفروق . ومثل هذا العمل ليس مشروعاً ، بصورة عامة . فمع أن التوزيع $F(1, \nu)$ يكافيء ، كما رأينا في الفقرة (٦ - ٦) ، التوزيع $t^2_{(\nu)}$ ، وأن الإختبار F المتعلق بالمقارنات هو عملياً مكافئ للإختبار t ، إلا أن المقارنات هنا قد **صيغت** سلفاً قبل تنفيذ التجربة وليس بعد الإطلاع على نتائجها أو بعد تحليل التجربة والخروج بنتائج محددة .

جدول ١١-١٦ تحليل التشتت لمقارنات تتعلق بالبيان الإحصائي في الجدول ١١-٤

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
المعالجة 2 في مقابل بقية المعالجات	1	0	0	$\sigma^2 + \frac{4}{20}(\tau_1+\tau_3+\tau_4+\tau_5-4\tau_2)^2$
المعالجة 1 و 3 مقابل المعالجتين 4 و 5	1	100	100	$\sigma^2 + \frac{4}{4}(\tau_1+\tau_3-\tau_4-\tau_5)^2$
المعالجة 1 مقابل المعالجة 3	1	50	50	$\sigma^2 + \frac{4}{2}(\tau_1-\tau_3)^2$
المعالجة 4 مقابل المعالجة 5	1	98	98	$\sigma^2 + \frac{4}{2}(\tau_4-\tau_5)^2$
الخطأ	15	130	8.67	σ^2
المجموع	19	378		

١١-١٠ الفرق المهم الأدنى والمقارنات بدرجة واحدة من الحرية :

بقيت مسألة كيفية القيام بمقارنات معينة بين متوسطات المعالجات تواجه الباحثين العلميين والإحصائيين لسنين عديدة . وقد تطرقنا في الفقرة الماضية إلى القيام بمثل هذه المقارنات عندما تتم صياغتها سلفاً وقبل تنفيذ التجربة أو الإطلاع على نتائجها . ولكن معرفة المقارنات الهامة الضرورية بصورة سلفية غير ممكن دائماً . فالتجربة غالباً ما تكون من طبيعة استكشافية ، وبالتالي فإننا ننتظر من نتائج التجربة ومن التحليل الإحصائي لهذه النتائج أن تقدم لنا شيئاً من المعرفة عن طبيعة المعالجات المدروسة ومواقعها من بعضها البعض ، وبالتالي فإن النتائج هي التي قد تشير إلى المقارنات الهامة ، أو أنها تثير تساؤلات جديدة لها أهميتها تستدعي القيام بمقارنات معينة بين المعالجات . ومن المؤكد أن المجرب يرغب في أن يحصل من بيانه الإحصائي على أكثر من مجرد عبارة بسيطة (مبنية على الإختبار F) تقول ، مثلاً ، أن التأثيرات الحقيقية للمعالجات المدروسة ليست جميعها متساوية . فهو يريد ، بعد أن يصل إلى هذه النتيجة ، أن يعرف أيضاً ما إذا كان يمكن إعتبار عدد من هذه المعالجات مكافئة لبعضها البعض ، ومعرفة تلك المعالجة من المعالجات المدروسة التي يمكن اعتبارها المعالجة « الأفضل » .

ويقترح سنيديكور الحصول على تقدير مجالي (أي إقامة مجال ثقة) بالنسبة للمتوسط الحقيقي لكل معالجة ثم ملاحظة المجالات التي تتقاطع مع بعضها . وبعض الباحثين يفضلون استخدام ما يسمى بالفرق المهم الأدنى ، وسنرمز اختصاراً بِـ (ف . م . أ) ، وهو معرف بالعبارة التالية :

$$\text{ف.م.أ} = t_\alpha \cdot S_{(\bar{x}_i - \bar{x}_j)} \qquad (48)$$

حيث α هو مستوى الأهمية الذي اخترناه للتجربة ، ودرجات الحرية لِ t هو عدد درجات الحرية الموافقة « للخطأ » في جدول تحليل التشتت .
والطريقة عندئذ هي أن نأخذ القيمة المطلقة للفرق بين متوسطي معالجتين ، مثلاً ، $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$ونقول بأن التأثيرين الحقيقيين لهاتين المعالجتين غير متساويين اذا تجاوز هذا المقدار الفرق المهم الأدنى (ف.م.أ) المعرف في العلاقة(48).
أي اذا كان :

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| > t_\alpha \cdot S_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}$$

وبصورة عامة يُعتبر تطبيق هذه القاعدة أمراً خطراً اذا استُخدمت بدون تمييز بالنسبة لكل الأزواج الممكنة من المعالجات . ويبدو من المنطقي في حال وجود « معالجة أساس » ، وهي معالجة معيارية ، أن نقول بأن تطبيق طريقة الفرق المهم الأدنى يصبح مشروعاً وذلك لمقارنة بقية المعالجات مع هذه المعالجة المعيارية .

نلاحظ في طريقة تحليل التشتت أننا قسمنا مجموع المربعات الكلي إلى قسمين أحدهما يتضمن تشتت المتوسطات الملحوظة للمعالجات والآخر يحوي ما سميناه بمجموع مربعات الخطأ . واستخدمنا هذين الجزئين لإختبار فرضية تساوي متوسطات المعالجات . فإذا كانت المتوسطات الملحوظة قريبة من بعضها البعض نقبل الفرضية أما إذا كانت مبعثرة بصورة ملحوظة نرفض الفرضية . وكما نعلم فقد استخدمنا تشتت المتوسطات الملحوظة $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ لقياس مدى تبعثر ها .

ولكن المدى w هو أيضاً قياس للتبعثر ويمكن استخدامه لنقيس تبعثر هذه المتوسطات ويمكن إختبار فرضية تساوي متوسطات المعالجات بمقارنة مدى المتوسطات الملحوظة مع مجموع مربعات الخطأ . ويمكن القيام بذلك

باستخدام إحصاء الإختبار :

$$q = \frac{\omega}{S_p/\sqrt{n}}$$

حيث S_p^2 هو متوسط مربعات الخطأ و n حجم كل من العينات الـ k التي تحويها التجربة . والمخرج $S_p/\sqrt{n}$ هو تقدير لـ $\sigma/\sqrt{n}$ (الإنحراف المعياري للمتوسطات $\bar{x}$ لعينات حجمها n مسحوبة من نفس المجتمع ، وحيث σ هو الإنحراف المعياري لهذا المجتمع) .

ويقدم جدول في الملحق عدة نسب مئوية لتوزيع الإحصاء q حيث k عدد المتوسطات و ν عدد درجات الحرية الخاص بالخطأ في جدول تحليل التشتت . وقد كُتب في رأس الجدول $q=\omega/s$ وهي النسبة الموافقة للحالة n = 1 أي حالة k من الملاحظات من مجتمع طبيعي . ويُعدّل الإحصاء بالعامل $\sqrt{n}$ عند تطبيقه في حالة متوسطات لعينات حجم كل منها n .

ولنفرض أن لدينا أربع ملاحظات (n = 4) من كل من ثلاثة مجتمعات k = 3 ، فعدد درجات الحرية الموافق لمتوسط مربعات الخطأ هو 9 = 3 − 12. ونقرأ في الجدول أن احتمال كون $q=\frac{\omega}{S_p/4}$ أقل من 3.95 هو 0.95 وأن احتمال كونه أقل من 5.43 هو 0.99 . ومنطقة الرفض الموافقة ، عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$ ، لإختبار الفرضية القائلة بأن متوسطات المجتمعات الثلاثة متساوية ، هذه المنطقة تتألف من قيم إحصاء الأختبار q الأكبر من 3.95 وتكون هذه المنطقة ، من أجل اختبار عند مستوى الأهمية $\alpha = .01$ ، هي قيم q الأكبر من 5.43 . وإذا فرضنا ، على سبيل المثال ، أن المتوسطات الملحوظة هي $\bar{x}_1 = 2.25$ ، $\bar{x}_2 = 4.00$ ، $\bar{x}_3 = 4.50$ وأن متوسط مربعات الخطأ $S_p^2 = 4.41$ ، فعندئذ تصبح القيمة الملحوظة لإحصاء الإختبار q هي $q = \frac{2.25}{(2.10)/2} = 2.14$ ، وهي أقل من 3.95 . وهكذا فإننا لا نرفض الفرضية عند المستوى $\alpha = 0.5$.

تعميم إلى فرضيات أخرى : يمكن الاستفادة من توزيع q من أجل التقدير ، والقيام بإختبار عدة فرضيات بنفس الوقت حول فروق ممكنة بين المتوسطات أي حول مقادير من النوع . $\mu_4-\mu_2$ ، $\mu_1-\mu_2$ ، $\mu_1-\mu_3$

وبصورة عامة حول أي مقارنة بين المتوسطات الـ k مثل $a_1\mu_1+a_2\mu_2+\dots+a_k\mu_k$ حيث $\sum_{i=1}^{k} a_i=0$ وحيث نأخذ للسهولة مجموع المقادير a الموجبة مساوياً للواحد.

وتعتمد الإختبارات المتعلقة بالمقارنات هذه على النظرية التالية :

من أجل عينات عشوائية من k من المجتمعات الطبيعية لها نفس التشتت ، يكون احتمال أن تحقق كل المقارنات ، وبنفس الوقت ، المتراحجة :

$$-\frac{q_{1-\alpha}\cdot S_p}{\sqrt{n}} < (a_1\bar{x}_1+\dots+a_k\bar{x}_k)-(a_1\mu_1+\dots+a_k\mu_k) < \frac{q_{1-\alpha}\cdot S_p}{\sqrt{n}} \quad (49)$$

مساوياً لِ $1-\alpha$. حيث $q_{1-\alpha}$ هي قيمة q الموافقة كما نجدها في الجدول.

وعلى سبيل المثال ، إذا اعتبرنا الحالة التي ناقشناها أعلاه والتي وجدنا فيها $k = 3$ ، $n = 4$ ، $\bar{x}_1 = 2.25$ ، $\bar{x}_2 = 4.00$ $\bar{x}_3=4.50$ $S_p^2 = 4.41$ ومن أجل أمثال ثقة تساوي 0.95 نستخدم $q_{.95}=3.95$ كما نجدها من الجدول من أجل $k = 3$ وعدد من درجات الحرية $\nu=9$ (وباستخدام الرمز $q_{1-\alpha}(k,\nu)$ نكتب $q_{.95}(3,9)=3.95$). نحسب الآن $q_{1-\alpha}\cdot S_p/\sqrt{n}=3.95(2.10)/\sqrt{4}=4.15$

وعندها يمكننا القول ، وبثقة تساوي 0.95 ، أن العبارات التالية كلها صحيحة بنفس الوقت :

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2-4.15 < \mu_1-\mu_2 < \bar{x}_1-\bar{x}_2+4.15$$

$$-5.90 < \mu_1-\mu_2 < 2.40$$

و

$$\bar{x}_1-\bar{x}_3-4.15 < \mu_1-\mu_3 < \bar{x}_1-\bar{x}_3+4.15$$

$$-6.40 < \mu_1-\mu_3 < 1.90$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_3 - 4.15 < \mu_2 - \mu_3 < \bar{x}_2 - \bar{x}_3 + 4.15$$

و

$$-4.65 < \mu_2 - \mu_3 < 3.65$$

و

$$\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} - \bar{x}_3 - 4.15 < \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_3 < \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} - \bar{x}_3 + 4.15$$

$$-5.53 < \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_3 < 2.77$$

و

$$\frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_3}{2} - \bar{x}_2 - 4.15 < \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} - \mu_2 < \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_3}{2} - \bar{x}_2 + 4.15$$

$$-4.77 < \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} - \mu_2 < 3.53$$

و

$$\frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_3}{2} - \bar{x}_1 - 4.15 < \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} - \mu_1 < \frac{\bar{x}_2 + \bar{x}_3}{2} - \bar{x}_1 + 4.15$$

$$-2.15 < \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} - \mu_1 < 6.15$$

وهكذا من أجل أية مجموعة من المقارنات نستطيع أو نرغب في كتابتها .

وهذه الطريقة مفيدة جداً باعتبارها تمكننا من كتابة مجالات ثقة حول فروق أو مقارنات يقترحها البيان الإحصائي نفسه بدلاً من الإقتصار على مقارنات خاصة نضعها سلفاً قبل الإطلاع على نتائج التجربة . ونستخدم النتائج الاستكشافية لتجربة ، عادة ، من أجل صياغة فرضية جديدة تكون موضوع تجربة جديدة نقوم بها للوصول إلى نتيجة برفض أو قبول هذه الفرضية الجديدة . ولكن باستخدام الإحصاء q يمكننا الإستفادة من نفس البيان الإحصائي لإختبار فرضيات تمليها نتائج غير متوقعة تمخضت عنها التجربة . ولا بد من التأكيد في هذا المجال أنه إذا كان لمقارنة معينة بمفردها أهمية

خاصة فإنه يمكن الحصول على مجال ثقة أقصر حول هذه المقارنة باستخدام التوزيع t وكتابة مجال ثقة من النوع :

$$t_{\frac{1}{2}\alpha} \cdot S_p \sqrt{\frac{\sum a_i^2}{n}} < (a_1 \bar{x}_1 + \cdots + a_k \bar{x}_k) - (a_1 \mu_1 + \cdots + a_k \mu_k) < t_{1-\frac{1}{2}\alpha} \cdot S_p \sqrt{\frac{\sum a_i^2}{n}}$$

إلا أن أمثال الثقة $(1-\alpha)$ ينطبق فقط على هذه المقارنة بمفردها وليس على جملة من المقارنات . أي أننا نستطيع القول قبل تنفيذ التجربة بأن احتمال أن تكون هذه العبارة صحيحة هو $(1-\alpha)$ ، ولكننا لا نستطيع تعميم هذا الاحتمال على عبارات أخرى بنفس الوقت ، أي استخدام t لوضع مجالات ثقة مشابهة لمقارنات أخرى والقول بأن احتمال أن تكون هذه المجالات كلها صحيحة بنفس الوقت لا يزال $(1-\alpha)$. بينما يصبح مثل ذلك ممكناً باستخدام الإحصاء q ، ولكن المجالات الناتجة عن استخدام q ستكون أعرض .

ويمكن تسجيل عدد من المقارنات على شكل جدول من النوع المبين في الجدول (١١- ١٧) حيث وضعنا الأمثال $a_1, a_2, \ldots, a_k$ الموافقة لِ $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ بالنسبة لكل مقارنة في العمود الأول . ويبين الجدول (١١- ١٨) تطبيقاً للجدول (١١-١٧) في حالة مثال عددي . وفي هذا المثال ، ومستخدمين الإحصاء q عند المستوى α ، لا نجد دلالة بالنسبة للمقارنات الستة تمكننا من رفض القيمة صفر ، باعتبار أن كلاً من المجالات الستة التي حصلنا عليها تحوي القيمة صفر .

ولو فرضنا أننا سنقدر مقارنة واحدة فقط من بين هذه المقارنات لكان يمكن استخدام الإحصاء t من أجل هذه المقارنة الوحيدة . أي لو أننا اخترنا ، مثلاً ، المقارنة الثالثة قبل تنفيذ التجربة فيمكننا عندئذ وضع 95. مجال ثقة من أجل الفرق $\mu_1 - \mu_2$ كما يلي :

$$-.50 \pm 2.26(2.10)\sqrt{\frac{2}{4}} = -.50 \pm 3.36$$

جدول ١١ــ١٧ أمثلة عن مقارنات بين ثلاث معالجات

المقارنة بين متوسطات المجتمعات الثلاثة	حدود مجال الثقة	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$
$\mu_1 - \mu_2$	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \pm \frac{q \cdot S_p}{\sqrt{n}}$	1	−1	0
$\mu_1 - \mu_3$	$(\bar{X}_1 - \bar{X}_3) \pm \frac{q \cdot S_p}{\sqrt{n}}$	1	0	−1
$\mu_2 - \mu_3$	$(\bar{X}_2 - \bar{X}_3) \pm \frac{q \cdot S_p}{\sqrt{n}}$	0	1	−1
$\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_3$	$\left(\frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2}{2} - \bar{X}_3\right) \pm \frac{q \cdot S_p}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1
$\frac{\mu_1 + \mu_3}{2} - \mu_2$	$\left(\frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_3}{2} - \bar{X}_2\right) \pm \frac{q \cdot S_p}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{2}$	−1	$\frac{1}{2}$
$\frac{\mu_2 + \mu_3}{2} - \mu_1$	$\left(\frac{\bar{X}_2 + \bar{X}_3}{2} - \bar{X}_1\right) \pm \frac{q \cdot S_p}{\sqrt{n}}$	−1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

جدول ١١ـ١٨ مثال عددي من أجل المقارنات في الجدول ١١ـ١٧

2.25	4.00	4.50	حدود الثقة	المقارنة بين المتوسطات
1	-1	0	-1.75 ± 4.15	$\mu_1 - \mu_2$
1	0	-1	-2.25 ± 4.15	$\mu_1 - \mu_3$
0	1	-1	$-.50 \pm 4.15$	$\mu_2 - \mu_3$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	-1.38 ± 4.15	$\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} - \mu_3$
$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-.62 \pm 4.15$	$\frac{\mu_1 + \mu_3}{2} - \mu_2$
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2.00 ± 4.15	$\frac{\mu_2 + \mu_3}{2} - \mu_1$

١١-١١ التصنيف الثنائي بملاحظة واحدة : سنقدم في هذه الفقرة تحليل تجارب مصممة لدراسة مجتمعات مصنفة وفق خاصتين . ويمكن تنفيذ التجربة بطريقة ندرس فيها عدة متحولات بنفس الوقت . ونختار من أجل كل متحول عدداً من الصفات أو المستويات لدراستها .

ففي دراسة إنتاجية سلالات مختلفة من القمح يمكن أن نتقصى بنفس الوقت تأثيرات أسمدة مختلفة على إنتاجية هذه السلالات . وقد يرغب الباحث الإجتماعي ، عند دراسته لحجم الأسرة ، أن يتقصى تأثيرات حجم المدينة والمناطق ضمن البلاد التي تجري فيها الدراسة ، على حجم الأسرة . ويمكن حساب متوسط حجم العائلة في خمسة أصناف من المدن (مصنفة وفقاً لحجمها) وذلك في كل من ست مناطق ، ثم نتقصى النتائج فيما يتعلق بتأثير حجم المدينة على حجم الأسرة مستقلاً عن تأثير المنطقة ، وتأثير المنطقة على حجم الأسرة مستقلاً عن حجم المدينة .

وسندرس في هذه الفقرة الحالة التي نأخذ فيها ملاحظة واحدة من أجل كل تركيب من المستويات . ويمثل الجدول (١١-١٩) وهو يحوي 12 خلية تجربة بمتحولين ، وبقع متحول الصفوف في ثلاث مستويات، هي ، مثلاً ، a ، b ، c ويقع متحول الأعمدة في أربع مستويات ، مثلاً ، A ، B ، C ، D . والملاحظة الواقعة في الخلية ij ، أي الخلية الموافقة للصف i والعمود j ، نرمز لها بِـ x_{ij} ، أما مجموع الصف i فنرمز له بِـ $T_{i.}$ ، أي أن $T_{i.}=\sum_{j=1}^{4} x_{ij}$ ، ومجموع العمود j نرمز له بِـ $T_{.j}$. وتمثل النقطة بصورة عامة عملية جمع أو أخذ متوسط فوق جميع الملاحظات الموافقة لقيم الدليل الذي حلّت النقطة محله . وترمز $T_{..}$ للمجموع الكلي للملاحظات . وهكذا يكون $\bar{x}_{i.}$ متوسط الصف i ، و $\bar{x}_{.j}$ متوسط العمود j ، $\bar{x}_{..}$ المتوسط الإجمالي لكافة الملاحظات . وبصورة عامة نتحول i من 1 إلى r و j من 1 إلى c ، أي يوجد r من الصفوف و c من الأعمدة .

وسنوضح طريقة تحليل التشتت في هذه الحالة بمثال عددي .

جدول ١١ـ١٩ تجربة تصنيف ثنائي

متحول الأعمدة

		A	B	C	D	المجموع	المتوسط
متحول الصفوف	a	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$T_{1.}$	$\bar{x}_{1.}$
	b	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	$T_{2.}$	$\bar{x}_{2.}$
	c	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{44}	$T_{3.}$	$\bar{x}_{3.}$
المجموع		$T_{.1}$	$T_{.2}$	$T_{.3}$	$T_{.4}$	$T_{..}$	
المتوسط		$\bar{x}_{.1}$	$\bar{x}_{.2}$	$\bar{x}_{.3}$	$\bar{x}_{.4}$		$\bar{x}_{..}$

وفي الفقرات السابقة ، أي في حالة التصنيف الأحادي ، حصلنا على تقدير للتشتت من متوسطات الأعمدة . وسنقدر هنا التشتت من متوسطات الصفوف أيضاً ، وسنوضح الحسابات المطلوبة في تحليل التشتت من خلال البيان الإحصائي في الجدول (١١ـ ٢٠) . وبالنسبة لتقدير التشتت الذي نحصل عليه من متوسطات الأعمدة ، فإننا نحسبه كما في حالة التصنيف الأحادي تماماً ، أي أن مجموع مربعات الأعمدة (أو المعالجات) هو :

$$\frac{(13)^2}{3} + \frac{(16)^2}{3} + \frac{(17)^2}{3} + \frac{(14)^2}{3} - \frac{(60)^2}{12} = 303.33 - 300 = 3.33.$$

جدول ١١ـ٢٠

	A	B	C	D	$T_{i.}$
a	7	6	8	7	28
b	2	4	4	4	14
c	4	6	5	3	18
$T_{.j}$	13	16	17	14	60

وبصورة مشابهة فإن مجموع المربعات المتعلق بمتوسطات الصفوف ، والذي يشكل بدوره تقديراً للتشتت هو :

$$\frac{(28)^2}{4} + \frac{(14)^2}{4} + \frac{(18)^2}{4} - \frac{(60)^2}{12} = 326 - 300 = 26.00$$

ومجموع المربعات الكلي هو :

$$7^2 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 3^2 - \frac{(60)^2}{12} = 336 - 300 = 36.00$$

ونلاحظ أن هذه العلاقات كلها متشابهة ، فالمخرج يمثل دائماً عدد الملاحظات التي تشكل الصورة مجموعها . ويبين الجدول (١١ـ٢١) تحليل التشتت :

جدول ١١ـ٢١ تحليل التشتت

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات
الصفوف	26.00	2	13.00
الأعمدة	3.33	3	1.11
الخطأ	6.67	6	1.11
المجموع	36.00	11	

ونحصل على مجموع مربعات الخطأ بطرح مجموع مربعات الصفوف ومجموع مربعات الأعمدة من مجموع المربعات الكلي . وبما أنه توجد ثلاثة صفوف فيكون لدينا درجتان من الحرية من أجل الصفوف . ويوجد أربعة أعمدة وبالتالي ثلاث درجات من الحرية من أجل الأعمدة . أما درجات الحرية الموافقة للخطأ فنحصل عليها بالطرح : 6=3-2-11 . ويمكن الحصول على النسبة F التي نختبر بواسطتها وجود فروق هامة بين الصفوف ، وذلك بقسمة متوسط مربعات الصفوف على متوسط مربعات الخطأ ، وهما تقديران

مستقلان للتشتت ، أي :

$$F = \frac{13.00}{1.11} = 11.7$$

وبالمقارنة مع $F_{.05}(2,6) = 5.14$ نرفض الفرضية بأنه لا توجد فروق بين متوسطات الصفوف . ويمكن القيام باختبار الفرق بين متوسطات الأعمدة ، وبصورة مستقلة عن وجود أو عدم وجود فروق بين الصفوف ، باستخدام النسبة :

$$F = \frac{1.11}{1.11} = 1.00,$$

والمقارنة مع $F_{.05}(3,6) = 4.76$ نقبل الفرضية بعدم وجود فروق بين متوسطات الأعمدة .

وقياساً على ما رأيناه في حالة التصنيف الأحادي نجد العلاقة :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}(x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c}\left[x_{ij} - (\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..}) - (\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..}) - \bar{x}_{..}\right]^2$$

$$+ c\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_{i.} - \bar{x}_{..})^2 + r\sum_{j=1}^{c}(\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{..})^2 \quad (50)$$

ويمكن برهان هذه المعادلة بحساب كل من الحدود الأربعة في طرفيها . فكما وجدنا في الفقرة (١١ـ ٣) يمكن كتابة الحد في الطرف الأيسر ، وهو مجموع المربعات الكلي ، على الشكل :

$$SST = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} x_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{rc} \quad (51)$$

ويمكن كتابة الحدين الأخرين من الطرف الأيمن على الشكل :

$$SSR = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{r} T_{i.}^{2} - \frac{T_{..}^{2}}{rc} \qquad (52)$$

$$SSC = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{c} T_{.j}^{2} - \frac{T_{..}^{2}}{rc} \qquad (53)$$

والحد الأول من الطرف الأيمن هو :

$$SSE = \sum_{i}\sum_{j}(x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} + \bar{x}_{..})^2$$

ويمكن كتابة هذا الحد على الشكل :

$$SSE = \sum_{i}\sum_{j} x_{ij}^{2} - \frac{\sum T_{i.}^{2}}{c} - \frac{\sum T_{.j}^{2}}{r} + \frac{T_{..}^{2}}{cr} \qquad (54)$$

ونرى بسهولة أن الأشكال الحسابية في (52) و (53) و (54) للحدود في الطرف الأيمن تجمع تماماً إلى الشكل الحسابي (51) للطرف الأيسر . وهكذا يمكن الحصول على مجموع المربعات SSE بطرح كل من مجموع مربعات الأعمدة SSC ومجموع مربعات الصفوف SSR من مجموع المربعات الكلي SST .

الخطوط العريضة لتحليل التشتت في حالة تصنيف ثنائي بملاحظة واحدة :

١ ـ الفرضية ١ : تأثيرات الأعمدة مساوية للصفر . ويتم اختبار هذه الفرضية مستقلاً عن تأثيرات الصفوف .

الفرضية ٢ : تأثيرات الصفوف مساوية للصفر . ويتم إختبار هذه الفرضية مستقلاً عن تأثيرات الأعمدة .

٢ ـ إختيار مستوى الأهمية α .

٣ ـ نستخدم الإحصاء F في إختبار الفرضيتين : من أجل الفرضية 1 نستخدم نسبة متوسط مربعات الأعمدة إلى متوسط مربعات الخطأ . ومن أجل الفرضية 2 نستخدم نسبة متوسط مربعات الصفوف إلى متوسط مربعات الخطأ .

٤ ـ وبفرض أن الملاحظات قد اختيرت بصورة عشوائية من مجتمعات طبيعية لها نفس التشتت وأن تأثيرات كل من الصفوف والأعمدة تجميعية ، يكون توزيع النسبتين F المذكورتين في الخطوة ٣ هما على الترتيب توزيع سنيديكور $F[c-1, (r-1)(c-1)]$ ، وتوزيع سنيديكور $F[r-1, (r-1)(c-1)]$

٥ ـ منطقة الرفض بالنسبة للفرضية 1 هي :

$$F > F_{1-\alpha}[c-1, (r-1)(c-1)]$$

ومنطقة الرفض بالنسبة لِلفرضية 2 هي :

$$F > F_{1-\alpha}[r-1, (r-1) c-1)]$$

٦ ـ نحسب النسبتين F ونرفض أو نقبل كلاً من الفرضيتين .

وعندما نصمم التجربة على هذا الشكل يمكن اختبار الفرضية بأن تأثيرات الأعمدة ولنرمز لها بِـ c_j مساوية للصفر وذلك مستقلاً عما إذا كان يوجد تأثيرات r_i للصفوف أم لا ؟ وبالمقابل يمكن إختبار الفرضية بأن تأثيرات الصفوف r_i مساوية للصفر وذلك مستقلا عما إذا كان يوجد تأثيرات c_j للأعمدة أم لا ؟ ويجب أن نفرض على أي حال أن هذه التأثيرات تجميعية ، أي أنه يمكن كتابة متوسط الخلية ij ، الخلية الموافقة للصف i والعمود j ، على الشكل $\mu_{ij} = \mu + r_i + c_j + e$ ، حيث μ نفسه بالنسبة لكل الخلايا أما r_i فيختلف من صف إلى آخر وهو بالتالي يمثل حصة أو عطاء الصف i في تعيين مقدار μ_{ij} ، وبصورة مشابهة فإن c_j التي تبقى نفسها بالنسبة لجميع خلايا العمود j تمثل مشاركة أو عطاء الصف i في تحديد

مقدار μ_{ij} ، أما ϵ فتدعى مركبة الخطأ . وإحدى تفسيرات خاصة التجميعية هو عدم وجود تفاعل بين الصفوف والأعمدة . أي أنه لا يوجد تأثير مشترك لصف وعمود يختلف عن تأثيريهما المنفصلين كما ذكرناهما أعلاه .

ويبين الجدول (١١ـ٢٢) جدول تحليل التشتت لتصنيف ثنائي بملاحظة واحدة في كل خلية ، حيث σ^2 هو التشتت المشترك لِـ rc من المجتمعات الموافقة للخلايا .

وتنبغي ملاحظة انه غالباً ما يجري تحليل التشتت دون التأكد التام من عدم وجود تفاعل بين متحولي الصفوف والأعمدة . ويمكن أن يقود مثل هذا التحليل إلى نتائج مفيدة إلا أنه ينبغي الحذر باعتبار أننا نعرف القليل عن تأثير التفاعل على نتائج التحليل .

١١ـ١٢ التصنيف الثنائي بعدة ملاحظات في الخلية الواحدة : نحصل على أفضل تقدير لتشتت الخطأ σ^2 من قياسات تتكرر تحت نفس الشروط . لنفرض أنه في دراسة إنتاج القمح لدينا تصنيف ثنائي وفقاً للمعالجات المطبقة (أسمدة مثلاً) ووفقاً للسلالات . وأننا زرعنا القمح في عدة وحدات تجريبية من أجل كل تركيب من التراكيب الممكنة بين المعالجات والسلالات . فنقول عندئذ أن التجربة قد أعيدت أو كررت . وسيمكننا مثل هذا التكرار من تحليل التجربة بصورة أكمل . والتحليل هو تركيب للطريقتين اللتين قدمناهما حتى الآن . فالبيان الإحصائي سيأخذ الشكل المبين في الجدول (**١١ـ٢٣**) مع فرض وجود صفين ، **ثلاثة** أعمدة ، **ثلاثة** تكرارات . (وسنستعرض هنا حالة عدد متساو من التكرارات في كل خلية ، ولا بد من تعديلات تطرأ على التحليل في حالة عدد غير متساو من التكرارات) .

جدول ١١-٢٢ تحليل التشتت لتصنيف ثنائي بملاحظة واحدة

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	النسبة F	توقع متوسط المربعات
ما بين الأعمدة	$\sum_{j=1}^{c} \frac{T_{.j}^2}{r} - \frac{T_{..}^2}{rc} = SSC$	$c-1$	$MSC = \frac{SSC}{c-1}$	$\frac{MSC}{MSE}$	$\sigma^2 + \frac{\sum_{j=1}^{c} C_j^2}{c-1}$
ما بين الصفوف	$\sum_{i=1}^{r} \frac{T_{i.}^2}{c} - \frac{T_{..}^2}{rc} = SSR$	$r-1$	$MSR = \frac{SSR}{r-1}$	$\frac{MSR}{MSE}$	$\sigma^2 + \frac{\sum_{i=1}^{r} r_i^2}{r-1}$
الخطأ	$SSE = SST - SSC - SSR$	$(c-1)(r-1)$	$MSE = \frac{SSE}{(c-1)(r-1)}$		σ^2
المجموع	$SST = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} X_{ij}^2 - \frac{T_{..}^2}{rc}$	$rc-1$			

جدول ١١ـ٢٦ تحليل التشتت

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	النسبة F
بين المتوسطات الستة	78.67	5	15.73	10.9
ما ضمن العينات	17.33	12	1.44	
المجموع	96.00	17		

وبمقارنة $F = 10.9$ مع $F_{.95}\,(5, 12) = 3.11$ نجد أنه توجد دلالة ، عند المستوى .05 ، على أن متوسطات المجتمعات الستة غير متساوية . ونحلل الآن مجاميع الخلايا كما في حالة التصنيف الثنائي بملاحظة واحدة التي استعرضناها في الفقرة السابقة . ونثبت النتائج في الجدول (١١ـ٢٧) .

ونحسب :

مجموع مربعات الصفوف :

$$SSR = \frac{38^2}{9} + \frac{(70)^2}{9} - \frac{(108)^2}{18} = 704.89 - 648 = 56.89$$

ونلاحظ أن كلاً من المجموعين 38 و 70 يحوي تسع ملاحظات . والمجموع الكلي 108 يحوي الملاحظات الثمانية عشر الأساسية المعطاة في الجدول (١١ـ٢٥) .

مجموع مربعات الأعمدة :

$$SSC = \frac{41^2}{6} + \frac{(27)^2}{6} + \frac{(40)^2}{6} - \frac{(108)^2}{18} = 668.33 - 648 = 20.33$$

جدول ١١ـ٢٧ تحليل التشتت

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات
ما بين الصفوف	56.89	1	56.89
ما بين الأعمدة	20.33	2	10.17
التفاعل بين الصفوف والأعمدة	1.45	2	0.72
ما بين المجاميع الجزئية	78.67	5	
ما ضمن العينات	17.33	12	1.44
المجموع	96.00	17	

مجموع المربعات من أجل « التفاعل » في الجدول (١١ـ٢٧) هو نفس مجموع مربعات الخطأ في تحليل التشتت الموافق للتصنيف الثنائي بملاحظة واحدة ، ونحصل عليه كما رأينا في الفقرة السابقة بالطرح أي :

$$78.67 - 56.89 - 20.33 = 1.45$$

وتُحدد درجات الحرية بنفس الطريقة أيضاً . أما مجموع مربعات المجاميع الجزئية فيوافق مجموع مربعات المتوسطات في الجدول (١١ـ٢٦) .

وقد استخدمنا حد التفاعل في هذا التحليل بدلاً من « الخطأ » باعتبار أنه يتوفر لنا تقدير آخر للتشتت من مجموع مربعات « ما ضمن العينات » يمكننا استخدامه لإختبار تلك الفروق بين المتوسطات التي لا يمكن أن نعزوها إلى فروق بين تأثيرات الصفوف أو فروق بين تأثيرات الأعمدة . ونعزو مثل هذه الفروق عادة إلى ما نسميه بالتفاعل بين الصفوف والأعمدة .

ونلاحظ أننا جزأنا مجموع المربعات الكلي إلى أربعة أجزاء : مجموع

جدول ١١ـ٢٨ تحليل التشتت لتصنيف ثنائي بعدة ملاحظات

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	F	توقع متوسط المربعات
ما بين الصفوف	$cn\sum_i(\bar{X}_{i..}-\bar{X}_{...})^2 = SSR$	$r-1$	$\frac{SSR}{r-1}=MSR$	$\frac{MSR}{MSE}$	$\sigma^2+cn\sigma_r^2$
ما بين الأعمدة	$rn\sum_j(\bar{X}_{.j.}-\bar{X}_{...})^2 = SSC$	$c-1$	$\frac{SSC}{c-1}=MSC$	$\frac{MSC}{MSE}$	$\sigma^2+rn\sigma_c^2$
التفاعل	$S_s-SSR-SSC = SSI$	$(r-1)(c-1)$	$\frac{SSI}{(r-1)(c-1)}=MSI$	$\frac{MSI}{MSE}$	$\sigma^2+n\sigma_I^2$
ما بين المجاميع الجزئية	$n\sum_i\sum_j(\bar{X}_{ij.}-\bar{X}_{...})^2 = S_s$	$rc-1$			
ما ضمن العينات (الخطأ)	$SST-S_s=SSE$	$rc(n-1)$	$\frac{SSE}{rc(n-1)}=MSE$		σ^2
المجموع	$\sum_i\sum_j\sum_k(X_{ijk}-\bar{X}_{...})^2 = SST$	$rcn-1$			

ونلاحظ من الجدول (١١ـ٢٨) أنه إذا كان $\sigma_I^2 = 0$ فإن متوسط مربعات التفاعل وما ضمن العينات يشكل كل منهما تقديراً منصفاً للتشتت σ^2. وهذا يقترح علينا أن ضم التقديرين يمكن أن يقدم لنا تقديراً أفضل لِـ σ^2، وبالتالي يتيح فرصة لإختبار أدق بالنسبة لتأثيرات الصفوف والأعمدة. والقاعدة المقترحة عندئذ والتي لا ينقصها بعض التبرير النظري هو أن نقوم بعملية الضم هذه إذا كانت نسبة متوسط مربعات التفاعل إلى متوسط مربعات ما بين العينات أقل من ضعف قيمة $F_{.50}$ كما نحصل عليه من جدول التوزيع F. وباستخدام هذه القاعدة سنقوم بعملية الضم المقترحة باعتبار أن النسبة هي 0.72 وهي أقل من $2\ F_{.50}\ (2,12) = 2\ (.735) = 1.470$. وعملية الضم تتضمن جمع مجموع مربعات التفاعل إلى مجموع مربعات ما ضمن العينات للحصول على مجموع مربعات « الراسب » ، ونجمع أيضاً درجات الحرية للحصول على درجات الحرية الموافقة للراسب. وفي مثالنا أعلاه نجد أن متوسط الراسب هو $18.78/14 = 1.34$. ونستخدم الآن متوسط مربعات الراسب كمخرج لتشكيل النسب F الموافقة للصفوف والأعمدة. والنتائج مبينة في الجدول (١١ـ٢٩) .

جدول ١١ـ٢٩ تحليل التشتت

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	F
الصفوف	56.89	1	56.89	42.5
الأعمدة	20.23	2	10.17	7.59
الراسب	18.78	14	1.34	
المجموع	96.00	17		

وبما أن $F_{.05}(1,14) = 4.60$ فإننا نرفض الفرضية بتساوي متوسطات الصفوف . وباعتبار أن $F_{.05}(2,14) = 3.74$ فإننا نرفض أيضاً فرضية تساوي متوسطات الأعمدة وذلك عند المستوى $\alpha = .05$.

تمارين

١ ـ لدينا تحليل التشتت التالي :

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
بين المعالجات	4	244	61	$\sigma^2 + \frac{7}{4}\sum_{i=1}^{5} \tau_i^2$
بين الوحدات التجريبية ضمن المعالجات	30	270	9	σ^2
المجموع	34	514		

أ ـ اكتب النموذج المناسب .

ب ـ اعرض الفرضية الابتدائية التي صُممت التجربة لإختبارها .

حـ ـ اختبر الفرضية المعطاة في (ب) عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$.

٢ ـ ليكن التحليل التالي الناتج عن تجربة تحوي 6 معالجات ، 10 وحدات تجريبية من أجل كل معالجة ، وثلاثة قياسات من أجل كل وحدة تجريبية :

مصدر التغير	درجات الحرية	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
المعالجات	5	12489	$\sigma_\delta^2 + 3\sigma^2 + \frac{30}{5}\sum_{i=1}^{6}\tau_i^2$
الوحدات التجريبية ضمن المعالجات	54	3339	$\sigma_\delta^2 + 3\sigma^2$
القياسات ضمن الوحدة التجريبية	120	627	σ_δ^2
المجموع	179		

أ ـ اكتب النموذج الموافق للتجربة عارضاً بوضوح ما يمثله كل حد من الحدود .

ب ـ اختبر الفرضية بأن للمعالجات الست نفس المتوسط .

حـ ـ احسب تشتت متوسط المعالجة .

د ـ اذا علمنا أن متوسط المعالجة الثالثة هو 193.7 فاحسب وفسرّ 95 % مجال ثقة للمتوسط الحقيقي للمجتمع الموافق للمعالجة الثالثة .

٣ ـ هدف تجربة هو حساب مركبة التشتت الموافقة لتغيرات تركيز حامض الاسكوربيك (ملغ في المائة غرام) في أوراق اللفت . وقد أخذت ورقتان من المنطقة المركزية من كل من خمس نبتات وقيس تركيز حامض الاسكوربيك في كل ورقة . وقد كُرّرت هذه العملية يومياً على مدى ستة أيام ، علماً أن اختياراً جديداً من النبتات يتم في كل يوم . وكانت النتائج كما نجد في البيان الإحصائي التالي :

اليوم	الورقة	النبتة				
		1	2	3	4	5
1	A	9.1	7.3	7.3	10.7	7.7
	B	7.3	9.0	8.9	12.7	9.4
2	A	12.6	9.1	10.9	8.0	8.9
	B	14.5	10.8	12.8	9.8	10.7
3	A	7.3	6.6	5.2	5.3	6.7
	B	9.0	8.4	6.9	6.8	8.3
4	A	6.0	8.0	6.8	9.1	8.4
	B	7.4	9.7	8.6	11.2	10.3
5	A	10.8	9.3	7.3	9.3	10.4
	B	12.5	11.0	8.9	11.2	12.0
6	A	10.6	10.9	10.4	13.1	7.7
	B	12.3	12.8	12.1	14.6	9.4

٤ ـ اذا علمنا أن متوسطات 10 أفراد في كل من خمس مجموعات

هي 30, 34, 34, 36, 38 و أن تشتت متوسط المجموعة هو 8 ، فاكتب جدول تحليل التشتت .

٥ ـ ليكن تحليل التشتت التالي :

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
المعالجات	3	1800	600	$\sigma_\delta^2 + 3\sigma^2 + 30\sigma_\tau^2$
عينات ضمن المعالجات	36	4320	120	$\sigma_\delta^2 + 3\sigma^2$
قياسات ضمن العينات	80	960	12	σ_δ^2
المجموع	119	7080		

أ ـ احسب تشتت متوسط المعالجة .

ب ـ اختبر الفرضية $H_0 : \sigma_\tau^2 = 0$ وفسّر جوابك .

جـ ـ إذا علمنا أن متوسط العينة من المعالجة 1 هو 80 ، فاحسب 95 % مجال ثقة لتقدير المتوسط الحقيقي للمعالجة رقم 1 .

٦ ـ كل مجموعة من مجموعات الملاحظات التالية هي عينة عشوائية من مجتمع طبيعي . اختبر تجانس التشتتات . ثم اختبر تساوي المتوسطات باستخدام تحليل التشتت

A	B	C	D
49	49	44	58
42	44	57	54
47	50	34	64
76	58	48	60
69	70	50	53
58			64
			52
			42

٧ ـ ترغب وكالة في تحديد ما إذا كانت خمسة أنواع من السيارات تقطع نفس عدد الأميال من أجل كل غالون من الوقود . ومن أجل ذلك استخدمت ثلاث سيارات من كل نوع وذلك من كل من ثلاث مدن ، واختبرت ما تقطعه كل عربة من أجل غالون من البنزين . وكانت النتائج كما في الجدول .

أ ـ لماذا اخترنا ثلاث مدن وليس مدينة واحدة ؟

ب ـ ما هي المجتمعات التي جاءت منها العينات ؟

ج ـ ماذا نفترض بالنسبة للمجتمعات وما هي الفرضيات التي يمكن اختبارها ؟

د ـ أنجز تحليل التشتت واعرض نتائجك بالكامل .

	المدن								
	لوس انجلوس			سان فرانسيسكو			بورتلاند		
A	20.3	19.8	21.4	21.6	22.4	21.3	19.8	18.6	21.0
B	19.5	18.6	18.9	20.1	18.9	20.5	19.6	18.3	19.8
C	22.1	23.0	22.4	20.1	21.0	19.8	22.3	22.0	21.0
D	17.6	18.3	18.2	19.5	19.2	20.3	19.4	18.5	19.0
E	23.6	24.5	25.1	17.6	18.3	18.1	22.1	24.3	23.8

الفصل الثاني عشر

تصميم الزمرة التامّة العشوائية وتصميم المربّع اللاتيني

ناقشنا في الفصل السابق طريقة تحليل التشتت وتطبيقها في حالتي التصنيف الأحادي والثنائي ، كما درسنا بالتفصيل التصميم التام العشوائية الذي يقدم أفضل طريقة للاستفادة من تحليل التشتت في حالة التصنيف الأحادي . وفي معظم الأبحاث والتحريات يكون عدد العوامل التي يجب دراستها أكثر من الواحد مما يجعل المعلومات الإحصائية مصنفة وفق بعدين أو أكثر . وإذا كنا قد تعرضنا في الفصل السابق إلى طريقة تحليل التشتت في حالة التصنيف الثنائي فإننا سنخصص هذا الفصل لدراسة تصميم الزمرة التامة العشوائية وتصميم المربع اللاتيني اللذين يقدمان الطريقة المثلى للاستفادة من تحليل التشتت في حالتي التصنيف الثنائي والثلاثي على الترتيب .

١٢ ـ ١ تصميم الزمرة التامة العشوائية : إذا لم تكن جميع الوحدات التجريبية التي تضمها التجربة متجانسة فلا يمكن استخدام التصميم التام العشوائية . إذ نعلم أنه إذا تضمنت التجربة t معالجة ، وكررنا تطبيق كل معالجة في b من الوحدات التجريبية ، فإن أحد الشروط اللازمة لتطبيق التصميم التام العشوائية هو أن تكون الـ bt من الوحدات التجريبية ، وهي مجمل الوحدات التي تتضمنها التجربة ، متجانسة ، أي أنه لا توجد مصادر يمكن أن ننسب لها تغير في الإنتاج من وحدة تجريبية إلى وحدة أخرى سوى الاختلاف بين المعالجتين المطبقتين في مثل هاتين الوحدتين . وبالطبع فإنه قلّما تتوفر للباحث مثل هذه الشروط . وفي هذه الحالة نلجأ إلى تصميم

الزمرة التامة العشوائية فنقسم الوحدات التجريبية إلى b زمرة تحوي كل منها t وحدة تجريبية (تكون الزمرة تامة اذا كان عدد الوحدات التجريبية فيها مساوياً لعدد المعالجات) ، وبحيث تتوفر خاصة التجانس فيما بين الوحدات التجريبية ضمن كل زمرة ، مما يمكننا من أن نحسب بسهولة ويسر مركبة جديدة من مركبات التشتت نعزوها إلى التغير من زمرة إلى زمرة أو ما بين الزمر . وتُوزع المعالجات على الوحدات التجريبية ضمن كل زمرة بصورة عشوائية . وبينما كانت المعالجات توزَّع بصورة عشوائية على جميع الوحدات التجريبية في التصميم التام العشوائية فقد وضعنا هنا قيداً على العشوائية بحيث تتناول الوحدات التجريبية ضمن كل زمرة على حدة .

ولإيضاح الفكرة الكامنة وراء هذا التصميم لنفرض ستة أنواع من الشوفان ، نريد المقارنة بين إنتاجية كل منها ، ولدينا قطعة من الأرض كافية لثلاثين وحدة تجريبية . ولكننا نعلم من سجل إنتاج هذه الأرض أنه يوجد تغير في الخصوبة من الشمال إلى الجنوب ، والأجزاء الواقعة في أقصى الشمال هي الأكثر خصوبة وتتناقص هذه الخصوبة كلما اتجهنا نحو الجنوب . ففي حالة كهذه يبدو منطقياً أن نقسم الأرض إلى خمس زمر تحوي كل زمرة ست وحدات تجريبية ، وبحيث تحوي الزمرة الأولى الوحدات الست الأكثر خصوبة ، وتحوي الزمرة الثانية الوحدات الست التي تأتي في المرتبة الثانية من الخصوبة ، وهكذا حتى نصل إلى الزمرة الخامسة التي تحوي الوحدات الست الأقل خصوبة والواقعة في أقصى الجنوب . وبعدها نوزع الأنواع الستة من الشوفان على الوحدات الست ضمن كل زمرة بصورة عشوائية وبحيث تتم عملية التوزيع العشوائية بصورة منفصلة ضمن كل زمرة .

وكمثال آخر لنفرض أن عملية صناعية لإنتاج سلعة معينة تستخدم مواداً أولية من ثلاثة مصادر مختلفة . ولنفرض أن المعالجات التي سنختبرها هي أربعة آلات مختلفة مصممة لإنتاج هذه السلعة . وإذا اعتبرنا المصادر الثلاثة

المختلفة للمواد الأولية زمراً فيمكن تقسيم المادة الأولية من كل مصدر إلى أربعة أجزاء تكون بمثابة الوحدات التجريبية ضمن كل زمرة ، ثم نخصص الآلات الأربعة بصورة عشوائية لهذه الأجزاء الأربعة .

وفي كلي المثالين يلاحظ القارئ أن عدد الوحدات التجريبية ضمن كل زمرة يساوي تماماً عدد المعالجات التي تهدف التجربة لدراستها ، وهذا يدعونا إلى وصف الزمرة بأنها تامة تمييزاً لها عن الحالة التي يكون فيها عدد المعالجات كبيراً ، وتحقيق صفة التجانس بين الوحدات ضمن كل زمرة صعباً ، مما يضطرنا ، حفاظاً على شرط التجانس ، أن نجعل عدد وحدات الزمرة أقل من عدد المعالجات المدروسة . وبذلك نحصل على تصميمات جديدة تنضوي تحت عنوان تصميمات الزمرة غير التامة .

١٢ ـ ٢ الحسابات في تصميم الزمرة التامة : سنوضح هذه الحسابات من خلال مناقشة تفصيلية للمثال التالي حيث نقارن تأثيرات عشرة أشكال من التعيين أو الراتب الغذائي اليومي على زيادة وزن العجول . ولزيادة كفاءة التجربة قسمنا العجول الأربعين المتوفرة للتجربة إلى أربع جماعات وذلك وفقاً لوزنها الابتدائي (أي وزنها عند بداية التجربة) . وسنشير إلى هذه الجماعات على أنها الزمر الأربعة في التجربة . ونوزع المعالجات (وهي أشكال الراتب الغذائي اليومي أو مخصصات الطعام اليومية) بصورة عشوائية على العجول ضمن كل زمرة . وكانت نتيجة التجربة كما يظهر في الجدول (١٢ ـ ١) التالي :

جدول ١٢ ـ ١ الزيادة في الوزن (بالليبرة) لأربعين عجلاً خضعت لمخصصات إطعام مختلفة

(يوجد تعديل في سلم القياس توخياً للسهولة)

المعالجات (الراتب الغذائي اليومي)

الزمر	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	5	8	6	1	3	8	6	4	4
2	3	4	7	5	2	5	8	12	5	4
3	3	5	10	5	1	7	7	2	6	2
4	5	5	9	2	2	8	8	5	3	3

وقد رمزنا للمعالجات العشر بالأحرف الأبجدية من A إلى J . وبينما تبدو النتائج في الجدول (١٢ ـ ١) مرتبة وفقاً للتسلسل الهجائي إلا أن توزع المعالجات ضمن كل من الزمر الأربع كان كما يبدو في الجدول (١٢ ـ ٢) وبالطبع فإن الترتيبة التي نراها في (١٢ ـ ٢) كان يمكن أن تظهر ، نتيجة للتوزيع العشوائي ، بأشكال عديدة مختلفة .

جدول ١٢ ـ ٢ توزع المعالجات كما تمخضت عن تطبيق العشوائية

1	الزمرة	H	B	F	A	C	I	E	J	D	G
2	الزمرة	A	I	G	H	J	D	F	E	C	B
3	الزمرة	E	A	C	I	B	H	D	G	J	F
4	الزمرة	J	F	D	B	H	I	A	C	G	E

وسنقسم التغير الكلي بين قيم الملاحظات في البيان الإحصائي (١٢ ـ ١) أي مجموع المربعات الكلي إلى ثلاثة أجزاء :

(i) التغير بين الزمر ، (ii) التغير بين المعالجات ، و (iii) الخطأ التجريبي أو التغير المنسوب إلى التحولات الكيفية والكمية للفروق بين المعالجات من زمرة إلى زمرة . ونحسب مجاميع المربعات الموافقة لمصادر التغير الثلاثة

هذه كما يلي :

(1) $SST=\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}(Y_{ij}-\bar{Y})^2=\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}Y_{ij}^2-\frac{T^2}{bt}$ مجموع المربعات الكلي

(2) $SSB=t\sum_{i=1}^{b}(\bar{Y}_{i.}-\bar{Y})^2=\frac{\sum_{i=1}^{b}B_i^2}{t}-\frac{T^2}{bt}$ مجموع مربعات الزمر

(3) $SSR=b\sum_{j=1}^{t}(\bar{Y}_{.j}-\bar{Y})^2=\frac{\sum_{j=1}^{t}T_j^2}{b}-\frac{T^2}{bt}$ مجموع مربعات المعالجات

(4) $SSE=\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}(Y_{ij}-\bar{Y}_{i.}-\bar{Y}_{.j}+\bar{Y})^2=SST-SSB-SSR$ مجموع مربعات الخطأ

(5) $T=\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}Y_{ij}$ المجموع الكلي

(6) $B_i=\sum_{j=1}^{t}Y_{ij}$ مجموع الملاحظات في الزمرة i

(7) $T_j=\sum_{i=1}^{b}Y_{ij}$ مجموع الملاحظات الموافقة للمعالجة j

(8) $\bar{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}Y_{ij}}{bt}=\frac{T}{bt}$ المتوسط الإجمالي للتجربة

(9) $\bar{Y}_{i.}=\sum_{j=1}^{t}Y_{ij}/t=\frac{B_i}{t}$ متوسط الزمرة i

(10) $\bar{Y}_{.j}=\sum_{i=1}^{b}Y_{ij}/b=\frac{T_j}{b}$ متوسط المعالجة j

و Y_{ij} هي القيمة الناتجة من الوحدة التجريبية في الزمرة i التي خضعت للمعالجة j

$(i = 1, 2, ..., b; j = 1, 2, ..., t)$. وفي مثالنا نجد :

$$SST = 2^2 + 5^2 + \ldots + 3^2 + 3^2 - \frac{(200)^2}{40} = 260 \quad (11)$$

$$SSB = \frac{(47)^2 + (55)^2 + (48)^2 + (50)^2}{10} - \frac{(200)^2}{40} = 3.8 \quad (12)$$

$$SSR = \frac{(13)^2 + (19)^2 + \ldots + (18)^2 + (13)^2}{4} - \frac{(200)^2}{40} = 163.5 \quad (13)$$

$$SSE = 260 - 3.8 - 163.5 = 92.7 \quad (14)$$

١٢ ـ ٣ الفرضيات التي تكمن وراء تصميم الزمرة التامة العشوائية : لكي نتمكن من تطبيق طرق التقدير ، واللجؤ إلى تحليل التشتت من أجل إختبار الفرضيات في تصميم الزمرة التامة العشوائية ، ننطلق من الفرض بتحقق الشروط التالية :

١ ـ الملاحظات y_{ij} $(i = 1, \ldots, t; j = 1, \ldots, b)$ هي متحولات عشوائية بتوزع كل منها حول متوسط ξ_{ij} ثابت .

٢ ـ الوسطاء ξ_{ij} توابع تجميعية في وسطاء أخرى موافقة للزمر والمعالجات . ويمكن التعبير عن هذه التوابع على الشكل :

$$\xi_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j \quad (15)$$

حيث

$$\beta_i = \frac{\sum_{j=1}^{t} \xi_{ij}}{t} - \mu \quad , \quad \mu = \frac{\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t} \xi_{ij}}{bt} \quad (16)$$

و

$$\tau_j = \frac{\sum_{i=1}^{b} \xi_{ij}}{b} - \mu \quad (17)$$

وهكذا يكون

$$\sum_{i=1}^{b} \beta_i = \sum_{j=1}^{t} \tau_j = 0 \quad (18)$$

٣ ـ المتحولات العشوائية y_{ij} متجانسة أي أن لكل منها نفس التشتت σ^2 .

٤ ـ تتوزع المتحولات y_{ij} مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي .

ويمكن تلخيص هذه الفرضيات بما يلي : يمكن تمثيل الملاحظات بالنموذج الرياضي الاحتمالي :

$$Y_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \qquad \begin{matrix} i = 1, ..., t \\ j = 1, ..., b \end{matrix} \qquad (19)$$

حيث μ، β_i، τ_j ثوابت تحقق ما يلي :

$$\sum_{i=1}^{b} \beta_i = \sum_{j=1}^{t} \tau_j = 0 \qquad (20)$$

وتمثل β_i التأثير الفعلي للزمرة i مقاساً كإنحراف عن المتوسط ، وتمثل τ_j التأثير الفعلي للمعالجة j مقاساً كإنحراف عن المتوسط . والمتحولات ε_{ij} مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ^2. وقد فرضنا هنا نموذج الثوابت . أما في نموذج مركبات التشتت فنفترض أن المقادير τ_j متحولات عشوائية مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ_τ^2 .

١٢ ـ ٤ اختبار الفرضيات في تصميم الزمرة التامة العشوائية : إذا عوضنا عن Y_{ij} ، $\bar{Y}_{i.}$ ، $\bar{Y}_{.j}$ ، و $\bar{Y}$ بدلالة النموذج المعرف بالمعادلة (19) فيمكن البرهان على أن توقع مجموع مربعات الزمر توقع مجموع مربعات المعالجات هو كما يلي :

$$E(SSB) = (b-1)\sigma^2 + t\sum_{i=1}^{b} \beta_i^2 \qquad (21)$$

$$E(SSR) = (t-1)\sigma^2 + b\sum_{j=1}^{t} \tau_j^2 \qquad (22)$$

والفرضية التي يهدف تصميم الزمرة التامة العشوائية إلى اختبارها هي عادة الفرضية بأنه لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية للمعالجات المختلفة المدروسة ؛ أي الفرض بأن كلاً من المعالجات تقدم نفس التأثير على الخاصة المقيسة . ونعبر عن ذلك رياضياً على الشكل :

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t = 0 \qquad (23)$$

أو

$$H_0 : \sum_{i=1}^{t} \tau_i^2 = 0 \qquad (24)$$

وبالاستناد إلى الفرض بأن البيان الاحصائي هو عينة عشوائية من مجتمع طبيعي نجد أن المتحول العشوائي SSE/σ^2 يتبع التوزيع كاي مربع بِـ $(t-1)\ (b-1)$ درجة من الحرية . وبطريقة مشابهة لما رأيناه في الفقرة (١١ ـ ٨) يتضح لنا هنا أنه إذا كانت الفرضية الإبتدائية H_0 صحيحة فعندئذ تتبع النسبة :

$$\frac{SSR}{\sigma^2 + \frac{b}{t-1}\sum_{j=1}^{t}\tau_j^2}$$

التوزيع كاي مربع بِـ $t-1$ درجة من الحرية . ونستنتج بطريقة مماثلة أيضاً أنه إذا وفقط إذا كانت الفرضية الإبتدائية صحيحة فإن النسبة :

$$F = \frac{SSR/\ (t-1)}{SSE/\ (b-1)\ (t-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات المعالجات}}{\text{متوسط مربعات الخطأ}} = \frac{MSR}{MSE} \quad ,(25)$$

تتبع التوزيع F بِـ $\nu_1 = t-1$ و $\nu_2 = (b-1)(t-1)$ من درجات الحرية . وهكذا يمكن استخدام النسبة F كإحصاء إختبار من أجل الفرضية H_0 .

ونلخص هذه النتائج في جدول تحليل التشتت (١٢ ـ ٣) الموافق لتصميم الزمرة التامة العشوائية .

جدول ١٢ ـ ٣ تحليل التشتت في تصميم الزمرة التامة العشوائية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات	النسبة F
الزمر	$b-1$	SSB	$MSB=\frac{SSB}{b-1}$	$\sigma^2+\frac{t}{b-1}\sum_{i=1}^{b}\beta_i^2$	
المعالجات	$t-1$	SSR	$MSR=\frac{SSR}{t-1}$	$\sigma^2+\frac{b}{t-1}\sum_{j=1}^{t}\tau_j^2$	$\frac{MSR}{MSE}$
الخطأ	$(b-1)(t-1)$	SSE	$MSE=\frac{SSE}{(t-1)(b-1)}$	σ^2	
المجموع	$bt-1$	SST			

وفي مثالنا هنا نجد جدول تحليل التشتت التالي :

جدول ١٢ ـ ٤ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي المعطى في الجدول (١٢ ـ ١)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات	F النسبة
الزمر	3	3.8	1.26	$\sigma^2 + \frac{10}{3}\sum_{i=1}^{4} \beta_i^2$	
المعالجات	9	163.5	18.17	$\sigma^2 + \frac{4}{9}\sum_{j=1}^{10} \tau_j^2$	
الخطأ التجريبي	27	92.7	3.43	σ^2	5.29
المجموع	39	260			

ولاختبار الفرضية : $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_{10} = 0$

نحسب النسبة $F = \frac{MSR}{MSE} = \frac{18.17}{3.43} = 5.29$ وبما أنها أكبر من

$F_{.01}(9,27) = 3.14$

فإننا نرفض الفرضية H_0 عند المستوى $\alpha = .01$ ، ونقرر أنه ليس للمعالجات العشرة (الرواتب الغذائية العشرة المطبقة على العجول) نفس التأثيرات بالنسبة لزيادة وزن العجول . ولكن هذا القرار بمفرده لا يرضي تساؤلاتنا . إذ نريد معرفة المعالجات ذات التأثير الضعيف لكي نتجنب على الأقل اعتبارها في تجاربنا المقبلة التي تدرس نفس الموضوع ، بالإضافة إلى التعرف على المعالجات الأجود التي يمكن أن نوصي باتباعها . وتوجد معلومات مفيدة في هذا المجال يمكن اقتباسها من دراسة متوسطات المعالجات . وسيكون من المفيد أن نقدم مع جدول تحليل التشتت جدولاً يضم متوسطات المعالجات والانحراف المعياري الموافق لها . ولكل من متوسطات المعالجات في تصميم الزمرة التامة العشوائية نفس الإنحراف المعياري. ونقدر تشتت متوسط المعالجة j من العلاقة :

$$\hat{V}(\bar{y}_{.j}) = \frac{MSE}{b} = \frac{\text{متوسط مربعات الخطأ}}{\text{عدد الملاحظات الموافقة لكل معالجة}} \qquad (26)$$

جدول ١٢ ـ ٥ تقديرات المتوسط الفعلي لزيادة الوزن من البيان الإحصائي في الجدول (١٢ ـ ١)

المعالجات

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
متوسط المعالجات	3.25	4.25	8.5	4.5	1.5	5.75	7.75	6.25	4.5	3.25
الإنحراف المعياري لكل متوسط معالجة	$= \sqrt{\frac{1}{4}(3.43)} = 0.93$									

بالعودة إلى الجدول (١٢ ـ ٣) نجد أن توقع متوسط مربعات الزمر هو $\sigma^2 + \frac{t}{b-1}\sum_{i=1}^{b}\beta_i^2$ ، فهل يمكن اختبار الفرضية $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$ ؟ ويمكن الحصول على الجواب بالعودة إلى الطريقة العشوائية المتبعة في تصميم الزمرة التامة العشوائية ، فقد وزعنا فيها المعالجات ضمن كل زمرة بصورة عشوائية إلا أن تشكيل الزمر ، أي طريقة تقسيم الوحدات التجريبية كلها إلى زمر ، بعيد جداً عن كونه عشوائي . وفي الحقيقة تُشكل الزمر بحيث تكون التأثيرات β_i على أكبر قدر ممكن من الاختلاف ، خاضعين لقيد واحد هو أن كل زمرة يجب أن تحوي t من الوحدات التجريبية المتجانسة قدر الإمكان . وهذا لا يترك أي مبرر لإختبار الفرضية $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$ وهكذا نقول أنه يمكن الاستفادة من تصميم الزمرة التامة العشوائية لإختبار فرضية تتعلق بتأثيرات المعالجات ، ولكن لا يمكن استخدامه ولاختيار فرضية حول تأثيرات الزمر .

١٢ ـ ٥ المقارنات في تصميم الزمرة التامة العشوائية : بصورة مماثلة لما رأيناه في التصميم التام العشوائية يكون من المفيد غالباً دراسة مقارنات معينة بين المعالجات بدلاً من الاكتفاء باختبار الفرضية $H_0: \tau_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, t)$ ولإيضاح الفكرة سنحلل البيان الإحصائي المبين في الجدول (١٢ ـ ٦) . وهذه المعلومات الإحصائية ناتجة عن عملية صناعية معينة استخدمنا فيها أربع ماكينات ، ونقيس انتاجية كل منها بعدد القطع التي تنتجها في اليوم . وسنعتبر الأيام الخمسة التي استمرت فيها التجربة زمراً ، والآلات الخمسة هي المعالجات .

جدول ١٢ ـ ٦ الإنتاج اليومي لأربع آلات منتجة

(الرقم يمثل عدد القطع الناتجة في يوم واحد)

اليوم	الماكينة A	B	C	D
1	293	308	323	333
2	298	353	343	363
3	280	323	350	368
4	288	358	365	345
5	260	343	340	330
	1419	1685	1721	1739

ومع الإطلاع على مواصفات الماكينات الأربع تتوضح لنا معلومات إضافية . فعلى سبيل المثال ، تمثل الماكينة A النوع القياسي المستخدم الآن في الصناعة ، بينما تمثل الماكينات B ، C ،و D تصاميم جديدة مقترحة لتحل محل الماكينة A . وبالإضافة إلى ذلك نعرف أن B و C تحوي أجزاء متحركة مصنوعة من صفائح الألمنيوم بينما لا تتصف D بمثل هذه الخاصة . كما نعلم من المواصفات الصناعية لِـ B أن تشحيمها يتم بصورة آلية بينما لا تتصف C بذلك . ولتقصي آثار هذه الخواص على الإنتاجية يمكن قبل البدء بالتجربة وضع المقارنات المبينة في الجدول (١٢ ـ ٧) والتي تمليها المواصفات السابقة .

جدول ١٢ ـ ٧ التمثيل الرمزي لثلاث مقارنات مختارة من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٢ ـ ٦)

المقارنة	الماكينة			
	A	B	C	D
1	+3	−1	−1	−1
2	0	+1	+1	−2
3	0	−1	+1	0

وبصورة مماثلة للطريقة التي عرضناها في الفقرة (١١ ـ ٩) يمكن ايجاد مجموع المربعات الموافق لكل من المقارنات الثلاث باستخدام العلاقة :

$$\text{مجموع مربعات المقارنة رقم } k = \frac{\left(\sum_{j=1}^{4} C_{jk} T_j\right)^2}{b \sum_{j=1}^{4} C_{jk}^2} \qquad (27)$$

حيث ترمز C_{jk} للأمثال التي تحدد المقارنة رقم k في الجدول (١٢ ـ ٧) .

وهكذا نجد :

$$\text{مجموع مربعات A في مقابل البقية} = \frac{[3\,(1419) - 1685 - 1721 - 1739]^2}{5\,(9 + 1 + 1 + 1)} = \frac{(-888)^2}{60} = 13142.4$$

$$\text{مجموع مربعات B و C في مقابل D} = \frac{[1685 + 1721 - 2\,(1739)]^2}{5\,(1 + 1 + 4)} = \frac{(-72)^2}{30} = 172.8$$

$$\text{مجموع مربعات B مقابل C} = \frac{(-1685 + 1721)^2}{5\,(1 + 1)} = \frac{(36)^2}{10} = 129.6$$

ويصبح تحليل التشتت كما في الجدول (١٢ ـ ٨) . وقد حسبنا مجاميع مربعات الزمر ، المعالجات ، والخطأ التجريبي بنفس الطريقة التي أوضحناها

في الفقرة (١٢ ــ ٢) . وإذا أضفنا مجاميع المربعات الموافقة للمقارنات الثلاث إلى بعضها نحصل على مجموع مربعات المعالجات ، ذلك لأن المقارنات الثلاث متعامدة (أنظر الفقرة ١١ ــ ٩)

ونلاحظ أن النسبة F المتعلقة بالمعالجات هامة وأن المقارنة « A في مقابل الباقي » هامة بصورة مرتفعة (النسبة F الموافقة لهذه المقارنة هي $60.05 = \frac{13142.4}{218.85}$) .

وأهمية النسبة F المتعلقة بالمعالجات تعني أننا نرفض الفرضية القائلة بتساوي إنتاجية الماكينات الأربع ، ونقرر وجود فرق هام بينها . أما أهمية المقارنة الأولى فإنها تشير إلى رفض الفرضية القائلة بأنه لا يوجد فرق بين إنتاجية الماكينة المستخدمة حالياً A ومتوسط إنتاجية الآلات المقترحة ، وبالتالي نقرر ضرورة إستبدال الماكينة بواحدة من الماكينات الأحدث B ، C ، أو D . والتساؤل الذي يطرح نفسه هو أي الماكينات B ، C ، أو D أفضل ؟ وللإجابة نلاحظ أن المقارنة B في مقابل C غير هامة وبالتالي نستنتج أنه ليس لميزة التشحيم الذاتي أي أثر يُذكر في مجال الإنتاجية (وهي النتيجة التي كان يمكن الحصول عليها بدون اللجؤ إلى أي تحليل إحصائي) أما المقارنة B و C في مقابل D فهي غير هامة أيضاً ، وهكذا نستنتج أيضاً أن كون أجزاء متحركة مصنوعة من صفائح الألمينوم ليس له تأثير يُذكر في إنتاجية الماكينة . والخلاصة فإننا سنوصي إدارة المصنع في هذه الحالة بتركيب إحدى الماكينات ذات التصميم الحديث B أو C أو D . أما إختيار واحدة منها دون الأخرى فيعود إلى عوامل أخرى غير الإنتاجية التي تدرسها التجربة مثل الكلفة ، سهولة التشغيل ، المظهر ، أو أية عوامل أخرى تبدو هامة لإدارة المصنع .

١٢ ــ ٦ فقدان معلومات إحصائية في تصميم الزمرة التامة العشوائية :

بعد كل الجهود التي يبذلها الباحث في تخطيط التجربة وتنفيذها على الطبيعة فقد تعترضه صعوبات من أهمها وأكثرها حدوثاً فقدانه لبعض الملاحظات أو القياسات أي حصوله على بيان إحصائي ناقص . والأسباب التي قد تؤدي

جدول ١٢ ـ ٨ تحليل التشتت للبيان الإحصائي في الجدول (١٢ ـ ٦)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	النسبة F
الزمر	4	2146.2	536.55	
المعالجات	3	13144.8	4381.6	20.02
A مقابل الباقي	1	13142.4		
B و C مقابل D	1	172.8		
B مقابل C	1	129.6		
الخطأ التجريبي	12	2626.2	218.85	
المجموع	19	18217.2		

إلى فقدان ملاحظة متعددة : موت حيوان ، وحدة تجريبية في الزراعة يغمرها فيضان ، عامل ينتـابه مرض فلا يقوم بالعمل المطلوب منه ، تعرّض وعاء زجاجي يحوي مادة مصنوعة (مربيات مثلاً) تدرسها التجرة للكسر ، أو فقدان السجل الذي يحوي الملاحظة الخ . وبما أن معظم التصاميم تحوي درجة معينة من التوازن أو التناظر فإن فقدان ملاحظة سيقضي على مثل هذا التوازن . ولا بد أن يؤدي ذلك إلى تعقيد الموقف ويتطلب إدخال تعديلات في التحليل المعتاد للتجربة ، وتوجد طرق لتحليل بيان إحصائي غير مصمم على أساس من التوازن أو التناظر يمكن اللجؤ إليها في مثل هذه الحالة . إلا أن للإحصائي طرقـاً أخرى أكثر بساطة سندرسها في هذه الفقرة ونقدم الخطوات الحسابية التي يتضمنها .

نذكر أولاً حالتين لا تقدمان في حالة تصميم الزمرة التامة العشوائية صعوبات تذكر وهمـا (i) فقدان زمرة بكاملها أو (ii) فقدان الملاحظات الخاصة بمعالجة معينة . وفي حالة فقدان زمرة أو أكثر نقوم بالتحليل متجاهلين تماماً الزمر المفقودة شريطة أن يكون عـدد الزمر الباقية إثنين على الأقل ، أي أننا نعتبر التجربة وكأنها مصممة في الأصل على أساس أن عدد الزمر هو العدد الذي تبقى لدينا . وفي حال فقدان الملاحظات المتعلقة بمعالجة يمكن أيضاً تجاهل هذه المعالجة وإتمام التحليل وكأن التجربة مصممة أساساً لدراسة المعالجات الباقية فقط . وينبغي على الباحث متابعة الأسباب التي أدت إلى غياب جميع الملاحظات المتعلقة بمعالجة معينة ويتخذ قراره بما يتفق وتلك الأسباب .

والحالة الأكثر حدوثاً هي غياب ملاحظة واحدة وعندئذ لا بد من الحصول على تقدير لقيمة هذه الملاحظة ولنـرمز لها بِـ M ثم نحلل التجربة مستخدمين القيمة المقدّرة . والمبدأ المتبع في تقدير الملاحظة الغائبة هو أن نتبنى قيمة لـ M تجعل عبارة مجموع مربعات الخطأ (وهي تابع في M) في نهايتها الصغرى . أي أننا نشتق هذه العبارة بالنسبة لِـ M ونكتب الناتج مساوياً للصفر . وبحل

المعادلة الناتجة نحصل على العلاقة التالية لتقدير M :

$$\hat{M} = \frac{tT + bB - S}{(t-1)(b-1)} \qquad (28)$$

حيث

t = عدد المعالجات

b = عدد الزمر

T = مجموع الملاحظات ضمن المعالجة الموافقة للملاحظة المفقودة .

B = مجموع الملاحظات ضمن الزمرة التي تحوي الملاحظة المفقودة .

S = مجموع كل الملاحظات الفعلية في التجربة .

وبعد تبديل القيمة $\hat{M}$ من أجل الملاحظة المفقودة نحلل البيان الإحصائي الجديد بالطريقة المعتادة ، ونحسب SSB ، SSR ، SSE و SST وفقاً للطريقة الحسابية المبينة في الفقرة (١٢ ـ ٢) . ولتجنب نتائج غير منصفة لا بد من تعديلات بسيطة في بنية جدول تحليل التشتت : والتعديل الأول هو تخفيض عدد درجات الحرية الموافق لكل من مجموع مربعات الخطأ SSE ، ومجموع المربعات الكلي SST ، بمقدار الواحد . والتعديل الثاني هو إجراء تخفيض في كمية مجموع مربعات المعالجات بحيث تصبح العبارة الجديدة لمجموع المربعات هذا تقديراً منصفاً لِـ σ^2 تحت الشرط بأن الفرضية $H_0: \tau_j = 0$ $(j = 1, 2, ..., t)$ صحيحة . أي أنه تحت هذه الفرضية تكون قيمة توقع مجموع مربعات المعالجات SSR الذي حصلنا عليه بعد إضافة التقدير $\hat{M}$ إلى البيان الإحصائي أكبر من σ^2 ، ولجعل هذا التوقع مساوياً لِـ σ^2 ، كما يجب أن يكون ، نقوم بالتخفيض المذكور أعلاه ونتفادى الحصول على إختبار غير منصف للفرضية H_0 . ويمكن البرهان على أن كمية التخفيض أو التصحيح الضروري معرف بالعلاقة :

$$Z \text{ التصحيح } = \frac{[B - (t-1)\hat{M}]^2}{t(t-1)} \qquad (29)$$

ومجموع مربعات المعالجات الذي سنستخدمه في جدول تحليل التشتت هو إذن :

$$SSR' = SSR - Z \qquad (30)$$

وتحليل التشتت المطلوب لإختبار الفرضية H_0 هو التحليل المبين في الجدول (١٢ ـ ٩) . أما النسبة F فهي :

$$F = \frac{SSR'/(t-1)}{SSE/[(b-1)\ (t-1)-1]} \qquad (31)$$

جدول ١٢ ـ ٩ تحليل التشتت في حالة غياب ملاحظة واحدة من تصميم الزمرة التامة العشوائية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات
الزمر	b-1	SSB	SSB/(b-1)
المعالجات	t-1	SSR'	SSR'/ (t-1)
الخطأ التجريبي	(b-1) (t-1)-1	SSE	SSE/[(b-1 (t-1)-1]
المجموع	bt-2	SST-Z	

بنفس الطريقة يمكن معالجة حالة غياب ملاحظتين أو أكثر . وفي حال غياب ملاحظتين ليستا في نفس الزمرة يكون التصحيح الضروري في مجموع مربعات المعالجات هو :

$$Z = \frac{[B'-(t-1)M']^2 + [B''-(t-1)M'']^2}{t\ (t-1)} \qquad (32)$$

حيث

t = عدد المعالجات

B' = مجموع كل الملاحظات ضمن الزمرة التي تحوي الملاحظة المفقودة الأولى .

B″ = مجموع كل الملاحظات ضمن الزمرة التي تحوي الملاحظة المفقودة الثانية .

M′ = تقدير الملاحظة المفقودة الأولى .

M″ = تقدير الملاحظة المفقودة الثانية .

١٢ ـ ٧ تحليل تصميم الزمرة التامة العشوائية في حال وجود أكثر من ملاحظة واحدة من كل وحدة تجريبية : لنفرض أن المعالجات هي خمسة أنواع من الأسمدة نريد اختبار تأثيراتها المختلفة على إنتاج الشوفان . وأننا قررنا إستخدام تصميم الزمرة التامة العشوائية بست زمر . وقد رأينا عند الحصاد أنه يكفي الحصول على عينة نختارها بصورة عشوائية من كل وحدة تجريبية . أي بدلاً من الحصول على إنتاج الوحدة التجريبية بكاملها نكتفي بإنتاج ثلاث مربعات طول ضلع كل منها 3 أقدام ، وذلك من كل وحدة تجريبية . ونحصل بذلك على أرقام الإنتاج من 90 من هذه المربعات . ولنفرض أن النتائج كانت ، بعد تعديلات في سلم القياس ، تتوخى السهولة في الحسابات ، كما هو مبين في الجدول (١٢ ـ ١٠) .

والنموذج الموافق لبيان إحصائي من هذا النوع هو :

$$Y_{ijk} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} + \eta_{ijk} \qquad \begin{aligned} i &= 1, \ldots, b; \\ j &= 1, \ldots, t, \\ k &= 1, \ldots, n. \end{aligned} \qquad (33)$$

حيث تمثل β_i التأثير الفعلي للزمرة i ، و τ_j التأثير الفعلي للمعالجة j ، ε_{ij} خطأ العشوائية الموافق للوحدة التجريبية من الزمرة i الخاضعة للمعالجة j (وهي تمثل أيضاً كل التأثيرات العائدة لعوامل خارجية لم نحسب حسابها في عاملي الزمر والمعالجات) و η_{ijk} هو خطأ العشوائية الموافق للعينة k من الوحدة التجريبية ij . أي الخطأ الذي يخلقه الإقتصار على إنتاج عينة من الوحدة التجريبية بدلاً من الحصول على إنتاج الوحدة التجريبية بكاملها . ونفرض

بالإضافة إلى ذلك أن :

$$\sum_{i=1}^{b} \beta_i = \sum_{j=1}^{t} \tau_j = 0 \qquad (34)$$

وأن المتحولات ε_{ij} مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت يساوي σ^2، أما المتحولات η_{ijk} فهي أيضاً مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت يساوي σ_η^2 كما نفرض أخيراً أن المتحولات ε_{ij} مستقلة إحصائياً عن المتحولات η_{ijk} .

وبعد أن عرضنا الفروض التي تقف وراء التصميم في هذه الحالة نعود إلى حساب مجاميع المربعات المختلفة فنعرضها فيما يلي :

مجموع المربعات الكلي $= SST = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n}(Y_{ijk}-\bar{Y})^2$

$$= \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^2 - \frac{T^2}{btn} \qquad (35)$$

مجموع مربعات ما بين الوحدات التجريبية $= SSC$

$$= n\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}(\bar{Y}_{ij.}-\bar{Y})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t} C_{ij}^2}{n} - \frac{T^2}{btn} \qquad (36)$$

مجموع مربعات الخطأ الناشيء عن العينات $= SSP = SST - SSC \qquad (37)$

مجموع مربعات الزمر $= SSB = tn\sum_{i=1}^{b}(\bar{Y}_{i..}-\bar{Y})^2$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{b} B_i^2}{tn} - \frac{T^2}{btn} \qquad (38)$$

مجموع مربعات المعالجات $= SSR \qquad (39)$

$$= bn\sum_{j=1}^{t}(\bar{Y}_{.j.}-\bar{Y})^2 = \frac{\sum_{j=1}^{t} T_j^2}{bn} - \frac{T^2}{b.tn}$$

جدول ١٢ ـ ١٠ قيم الإنتاج من 90 مربعاً وفق سلّم معدّل

الزمر	الأسمدة 1	2	3	4	5
1	57 46 28	67 72 66	95 90 89	102 88 109	123 101 113
2	26 38 20	44 68 64	92 89 106	96 89 106	93 110 115
3	39 39 43	57 61 61	91 82 98	102 93 98	112 104 112
4	23 36 18	74 47 69	105 85 85	103 90 105	120 101 111
5	48 35 48	61 60 75	78 89 95	99 87 113	113 109 111
6	50 37 19	68 65 61	85 74 80	117 93 107	124 102 118

$$\text{مجموع مربعات الخطأ التجريبي} = SSE = n\sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y})^2$$

$$= SSC - SSB - SSR \qquad (40)$$

حيث

$$T = \text{المجموع الكلي} = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad (41)$$

$$C_{ij} = ij \text{ مجموع الملاحظات ضمن الوحدة التجريبية} = \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad (42)$$

$$B_i = i \text{ مجموع ملاحظات الزمرة} = \sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad (43)$$

$$T_j = j \text{ مجموع ملاحظات المعالجة} = \sum_{i=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \qquad (44)$$

$$\bar{y} = \text{المتوسط الإجمالي للتجربة} = \frac{T}{btn} \qquad (45)$$

$$\bar{y}_{ij.} = ij \text{ متوسط الوحدة} = \frac{C_{ij}}{n} \qquad (46)$$

$$\bar{y}_{i..} = i \text{ متوسط الزمرة} = \frac{B_i}{tn} \qquad (47)$$

$$\bar{y}_{.j.} = j \text{ متوسط المعالجة} = \frac{T_j}{bn} \qquad (48)$$

و y_{ijk} هي الملاحظة k المأخوذة من الوحدة ij . ويبين الجدول (١٢ ـ ١١) تحليل التشتت في هذه الحالة .

ولدينا في المثال المعطي في الجدول (١٢ ـ ١٠) النتائج الحسابية التالية ، حيث b=6 ، t=5 ، و n=3 :

$$SST = 71907.6$$
$$SSC = 66771.0$$
$$SSP = 71907.6 - 66771.0 = 5136.6$$
$$SSB = 422.3$$
$$SSR = 65043.7$$
$$SSE = 66771.0 - 422.3 - 65043.7 = 1305.0$$

ولاختبار الفرضية $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t = 0$ نحسب النسبة :

$$F = \frac{\text{متوسط مربعات المعالجات}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}}$$

ونرفض الفرضية عند المستوى α إذا كانت $F > F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ حيث $\nu_1 = t - 1$ و $\nu_2 = (b-1)(t-1)$ وبالنسبه لمسألة دمج الخطأ التجريبي وخطأ العينات وإجراء الإختبار F بالإعتماد على الخطأ الناتج ، يمكن العودة إلى الفقرة (١١ـ ١٢) حيث ناقشنا مثل هذا الموضوع ، وعرضنا بعض المؤشرات التي يمكن الإهتداء بها قبل القيام بمثل هذا العمل . ويبين الجدول التالي تحليل التشتت من أجل المثال الذي نناقشه .

وقيمة النسبة F هي : (انظر الجدول ١٢ ـ ١١)

$$F = \frac{16260.9}{65.25} = 249.2$$

وهي نسبة هامة بصورة مرتفعة ، وبالتالي فإننا نرفض الفرضية $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_t = 0$ ونقرر أنه توجد فروق هامة بين تأثيرات الأنواع الخمسة من الأسمدة على إنتاج الشوفان .

جدول ١٢ ـ ١١ تحليل التشتت من أجل الزمرة التامة العشوائية بِـ n ملاحظة ضمن كل وحدة تجريبية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
الزمر	b−1	SSB	SSB/(b−1)	$\sigma_{\eta}^2 + n\sigma^2 + [nt/(b-1)]\sum_{i=1}^{b} \beta_i^2$
المعالجات	t−1	SSR	SSR/(t−1)	$\sigma_{\eta}^2 + n\sigma^2 + [nb/(t-1)]\sum_{j=1}^{t} \tau_j^2$
الخطأ التجريبي	(b−1) (t−1)	SSE	SSE/(b−1) (t−1)	$\sigma_{\eta}^2 + n\sigma^2$
خطأ العينات	bt (n−1)	SSP	SSP/ bt (n−1)	σ_{η}^2
المجموع	btn−1	SST		

الجدول (١٢ - ١٢) تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي المعطى في الجدول (١٢ - ١٠)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
الزمر	5	422.3	84.5	$\sigma_\eta^2 + 3\sigma^2 + \frac{15}{5}\sum_{i=1}^{6}\beta_i^2$
المعالجات	4	65043.7	16260.9	$\sigma_\eta^2 + 3\sigma^2 + \frac{18}{4}\sum_{j=1}^{5}\tau_j^2$
الخطأ التجريبي	20	1305.0	65.25	$\sigma_\eta^2 + 3\sigma^2$
خطأ العينات	60	5136.6	85.61	σ_η^2
المجموع	89	71907.6		

١٢ ـ ٨ تقدير مركبات التشتت والفعالية النسبية لتصميم الزمرة التامة العشوائية : بالاستفادة من الجدول (١٢ ـ ١١) نرى بسهولة أنه يمكن تقدير σ_η^2 بِـ s_η^2 حيث :

$$s_\eta^2 = \frac{SSP}{bt(n-1)} \qquad (49)$$

وتقدير σ^2 بِـ s^2 حيث :

$$s^2 = \frac{SSE/\ (b-1)\ (t-1)\ -\ SSP/\ bt\ (n-1)}{n} \qquad (50)$$

وإذا حدث أن حصلنا على تقدير سالب فإننا نعتبر التقدير صفراً .

ويرغب الباحث أحياناً في تقدير فعالية إستخدامه لتصميم الزمرة التامة العشوائية وذلك بالنسبة لما كان سيحصل عليه فيما لو استخدم التصميم التام العشوائية ، أي فيما لو وزعنا المعالجات بصورة عشوائية فوق جميع الوحدات التجريبية . وبعبارة أخرى فإن الباحث يرغب في معرفة ما إذا كان قد خسر أو ربح في مجال كفاءة أو فعالية التصميم عندما قام بتجميع الوحدات التجريبية في زمر متجانسة . وكما هو متوقع فإننا نعرف الفعالية النسبية لتصميم الزمرة التامة العشوائية . في مقابل التصميم التام العشوائية (ونرمز لها بِـ R.E.) كما يلي :

$$R.E. = \frac{\text{تقدير متوسط مربعات الخطأ التجريبي في التصميم التام العشوائية}}{\text{تقدير متوسط مربعات الخطأ التجريبي في تصميم الزمرة التامة العشوائية}} \qquad (51)$$

وإذا رمزنا بِـ B لمتوسط مربعات الزمر و E لمتوسط مربعات الخطأ التجريبي في تصميم الزمرة التامة العشوائية ، فيمكن البرهان على أن :

$$R.E. = \frac{(b-1\ B + b\ (t-1)\ E}{(bt-1)\ E} \qquad (52)$$

وإذا كان هناك من مبرر لاستخدام تصميم الزمرة التامة العشوائية فيجب ألا يقل متوسط مربعات الزمر B عن متوسط الخطأ التجريبي E . وعندها

ستكون قيمة الفعالية النسبية .R.E أكبر أو تساوي الواحد كما هو متوقع وعلى سبيل المثال ، نجد من الجدول (١٢ ــ ٨) أن :

$$R.E. = \frac{4\ (536.55)\ +\ 5\ (3)\ (218.85)}{19\ (218.85)} = 1.31$$

وهذا يعني أن تصميم الزمرة التامة العشوائية . هو على وجه التقريب 131 % فعال بالمقارنة مع التصميم التام العشوائية .

١٢ ــ ٩ منحنيات الإستجابة : تحليل التراجع لتأثيرات المعالجات ــ

لنفرض أن المعالجات المدروسة هي (i) مستويات (أو معدلات) مختلفة لتطبيق نفس السماد ، (ii) أوزان مختلفة لجسم متحرك في مسألة تدرس حركة هذا الجسم ، أو (iii) درجات مختلفة لتناول منشط في تجربة في مجال علم النفس الخ . وعندما تبرز حالات من هذا النوع نرغب في تشكيل فكرة عن كيفية تغير الخاصة المقيسة مع تغير مستوى المعالجة المطبقة . أي أننا نريد معرفة ما إذا كان التغير في الخاصة المقيسة يتم على أساس خطي ، تربيعي ، ... عندما يزيد أو ينقص مستوى المعالجة . وبعبارة أخرى نرغب في معرفة شيء ما عن شكل منحني الإستجابة بحيث نتمكن من تقدير المستوى الأمثل للمعالجة . والخطوة الأولى في القيام بمثل هذا التحليل هو تمثيل متوسطات المعالجات بيانياً لتشكيل فكرة أولية عن شكل منحني الإستجابة . ونستخدم كثيرات الحدود المتعامدة التي ذكرناها في الفصل التاسع للقيام بتحليل دقيق للبيان الإحصائي يقدم الجواب على المسألة المطروحة أعلاه . وسنقتصر على الحالات التي تختلف فيها مستويات المعالجة بمقادير متساوية ، ولا يشكل هذا القيد أية صعوبة بإعتبار أن الشيء المعتاد في هذه الحالات هو إستخدام مستويات بخطوات متساوية .

وقد رأينا في الفقرة (١٢ ــ ٥) أنه يمكن تفسيم مجموع مربعات المعالجات SSR إلى (t–1) جزءاً من خلال مقارنات متعامدة . وما سنعرضه الآن هو ببساطة طريقة أخرى لمثل هذا التقسيم بحيث يوافق كل من مجاميع المربعات

الجزئية الآن (وكل منها بدرجة واحدة من الحرية) إحدى الحدود الخطية ، التربيعية ، التكعيبية ، الخ . من معادلة منحني الإستجابة . ويمكن الحصول على مجاميع المربعات الجزئية بإستخدام الجداول التي تعطي أمثال كثيرات الحدود المتعامدة للحصول على الأمثال ξ'_{jk} ثم تعويضها في العلاقة التالية :

$$\text{مجموع المربعات العائد للحدّ من الدرجة } k = \frac{\left(\sum_{j=1}^{t} \xi'_{jk} T_j\right)^2}{b\sum_{j=1}^{t}\left(\xi'_{jk}\right)^2} \qquad (53)$$

حيث ξ'_{jk} هي أمثال كثيرة الحدود و T_j مجموع المعالجة j . وبإستخدام العلاقة (53) يمكن إذن حساب مجاميع المربعات الجزئية المطلوبة .

ومن المستبعد جداً أن يقوم الباحث بعزل أكثر من الحدود الثلاثة الأولى الخطية ، التربيعية ، والتكعيبية عند تجزئة مجموع مربعات المعالجات ؛ ويدعى الباقي ، في حال وجوده ، بالإنحراف عن التراجع ويوافقه ، في حال عزل حدود حتى الدرجة m ،عدد من درجات الحرية يساوي $t-m-1$ ولإيضاح هذه الطريقة لنحلل البيان الإحصائي المعطي في الجدول (١٢ ـ ١٣) .

جدول ١٢ ـ ١٣ إنتاج نوع من الحبوب وفقاً لمستويات من سماد معين
(الوحدة التجريبية = $\frac{1}{40}$ من الايكر والإنتاج مقاس بالقنطار الإنكليزي)

مستويات السماد

الزمر	لاسماد	10 ليبرة في الوحدة التجريبية	20 ليبرة في الوحدة التجريبية	30 ليبرة في الوحدة التجريبية	40 ليبرة في الوحدة التجريبية
1	20	25	36	35	43
2	25	29	37	39	40
3	23	31	29	31	36
4	29	30	40	42	48
5	19	27	33	44	47
مجموع المعالجات	114	142	175	191	214

والتمثيل البياني لمجاميع المعالجات (تراتيب) بدلالة مستويات المعالجة (فصول) تقترح علينا الشكل الخطي لمنحني الإستجابة (وهو المنحني الذي يمثل العلاقة الفعلية القائمة بين مستوى تطبيق السماد من جهة والإنتاج الموافق له من جهة أخرى) ومع ذلك فإننا سنعزل من مجموع مربعات المعالجات الحد التربيعي إلى جانب الحد الخطي . ونحسب وفقاً للطريقة الموضحة في الفقرة (١٢ ـ ٢) مجاميع المربعات التالية :

$$SSB = 154.16 = \text{مجموع مربعات الزمر}$$

$$SSR = 1256.56 = \text{مجموع مربعات المعالجات}$$

$$SSE = 193.44 = \text{مجموع مربعات الخطأ}$$

$$SST = 1604.16 = \text{مجموع المربعات الكلي}$$

وللحصول على الجزء الخطي من مجموع مربعات المعالجات ، وسنرمز له بـ T_j نفتش عن أمثال كثيرة الحدود الموافقة في الجدول (١٢ ـ ١٤) (أو تؤخذ

هذه الأمثال بصورة عامة من مراجع الجداول الإحصائية) ونستخدم العلاقة (5 3) فنجد :

$$T_L = \frac{[(-2)(114) + (-1)(142) + (0)(175) + (1)(191) + (2)(214)]^2}{5\,[(-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (2)^2]} = \frac{(249)^2}{50} = 1240.02$$

وبصورة مشابهة نجد الجزء التربيعي من مجموع مربعات المعالجات ، وسنرمز له بِـ T_Q :

$$T_Q = \frac{[(2)(114) + (-1)(142) + (-2)(175) + (+1)(191) + (2)(214)]^2}{5\,[(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (+1)^2 + (2)^2]} = \frac{(-27)^2}{70} = 10.41$$

ويكون مجموع مربعات « الإنحراف عن التراجع » ونرمز له بِـ T_D هو الباقي من مجموع مربعات المعالجات أي :

$$T_D = SSR - T_L - T_Q$$
$$= 1256.56 - 1240.02 - 10.41 = 6.13$$

ونلخص هذه النتائج في جدول تحليل التشتت (١٢ ـ ١٥) .

جدول ١٢ ـ ١٤ أمثال كثيرات الحدود المتعامدة في عدد من الحالات .

j	t = 2	t = 3		t = 4			t = 5			
	k = 1	k = 1	k = 2	k = 1	k = 2	k = 3	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4
1	− 1	− 1	+ 1	− 3	+ 1	− 1	− 2	+ 2	− 1	+ 1
2	+ 1	0	− 2	− 1	− 1	+ 3	− 1	− 1	+ 2	− 4
3		+ 1	+ 1	+ 1	− 1	− 3	0	− 2	0	+ 6
4				+ 3	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	− 2	− 4
5							+ 2	+ 2	+ 1	+ 1

وبحساب النسبة $F = 314.14/12.09 = 25.98$ بِـ $\nu_1 = 4$ و $\nu_2 = 16$ من درجات الحرية نرفض الفرضية $H_0: \tau_j = 0$ ، $(j = 1, \ldots, 5)$.

وكانت هذه النتيجة متوقعة بالطبع نظراً لطبيعة المعالجات . وإذا حسبنا النسبة $F = 1240.02/12.09 = 102.57$ بـ $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = 16$ من درجات الحرية يتضح لنا أن منحني الإستجابة يفصح عن نزوع خطي قوي . وهذا ما يشير إليه منذ البداية التمثيل البياني لمجاميع المعالجات . أما الحد التربيعي فهو غير هام وكذلك الإنحراف عن التراجع . وهكذا نستنتج ان منحني الإستجابة هو خط مستقيم ضمن حدود المستويات المستخدمة من السماد (أي بين 0 إلى 40 ليبرة في الوحدة التجريبية المستخدمة) ، وهذا يقترح علينا بوضوح أنه يمكن زيادة الإنتاج أيضاً مع زيادة السماد ، أي أننا لم نبلغ بعد المستوى الأمثل لتطبيق هذا السماد ، وأنه لا بد من القيام بالمزيد من التجارب ضمن الإتجاه الذي تمخضت عنه التجربة الحالية .

١٢ ـ ١٠ **تصميم المربع اللاتيني** : يستخدم تصميم المربع اللاتيني كثيراً في الزراعة والصناعة . وهو يسمح لنا بإختبار وجود فرق بين تأثيرات المعالجات مع وجود نوعين من القيود على الوحدات التجريبية . أي أنه تعميم لفكرة تصميم الزمرة التامة العشوائية حيث فرضنا قيداً واحداً على الوحدات التجريبية وهو أن يجري تصنيفها وفق زمر متجانسة . وسنعرض فيما يلي مثالين يوضحان القيدين المفروضين في حالة تصميم المربع اللاتيني وكيفية تطبيقهما .

مثال ١ : لنفرض أننا نريد إختبار وجود فرق بين تأثيرات خمسة أنواع من الأسمدة وتتوفر لنا خمس وعشرون وحدة تجريبية . ولكن الخصوبة تتغير في التربة في إتجاهين (مثلاً من الشمال إلى الجنوب ومن الشرق إلى الغرب) وعندئذ يبدو من المنطقي إقامة الزمر في كل من الإتجاهين وبحيث تحوي كل زمرة خمس وحدات تجريبية . وهو ما يتم فعلاً في تصميم المربع اللاتيني تحت عنواني الصفوف والأعمدة . ونوزع المعالجات بصورة عشوائية ولكن بحيث تظهر كل معالجة مرة واحدة فقط في كل صف وفي كل عمود .

جدول ١٢ ـ ١٥ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول ١٢ ـ ١٣

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات
الزمر	4	154.16	38.54
المعالجات	4	1256.56	314.14
خطي	1	1240.02	1240.02
تربيعي	1	10.41	10.41
الانحراف عن التراجع	2	6.13	3.07
الخطأ التجريبي	16	193.44	12.09
المجموع	24	1604.16	

مثال ٢ : لنفرض أننا نريد إختيار وجود فرق في إنتاجية أربع آلات تصنع سلعة معينة . ومن المعروف أن لكل من العامل الذي يدير الآلة والفترة من يوم العمل الذي يتم فيه تشغيل الآلة تأثيره في الإنتاجية . ففي مثل هذه الحالة نعتبر العمال الأربعة « أعمدة » وفترات أربعة من اليوم « صفوفاً » ، ثم نخصص الآلات بصورة عشوائية إلى الخلايا الستة العشر في المربع (الصفوف الأربعة والأعمدة الأربعة) وبحيث تُستخدم كل آلة مرة واحدة فقط من قبل كل عامل ومرة واحدة فقط في كل من الفترات الزمنية الأربع .

وإذا رمزنا للمعالجات بالحروف D ، C ، B ، A فيمكن ، على سبيل المثال ، أن يأخذ المربع اللاتيني الشكل التالي :

A	B	C	D
B	A	D	C
C	D	B	A
D	C	A	B

ويوجد 576 إمكانية لترتيب مربع لاتيني في الأحرف الأربعة D ، C ، B ، A فأيها نختار ؟ نقول أن المربع اللاتيني قياسي إذا كانت الحروف في الصف الأول والعمود الأول مرتبة وفق الأبجدية الهجائية ، ووفقاً لهذا التعريف يكون الشكل المذكور أعلاه مربعاً قياسياً من بين جميع المربعات اللاتينية 4×4 . ويوجد أربعة مربعات قياسية من نوع المربع القياسي 4×4 . ويزداد عدد المربعات القياسية بسرعة مع ازدياد عدد الأحرف . ونلاحظ أنه يمكن ترتيب كل من هذه المربعات القياسية الأربعة بِـ $4!(4-1)! = 144$ شكلاً ، أي أنه يوجد $4\,(144) = 576$ من المربعات اللاتينية 4×4 . والتوزيع العشوائي للمعالجات يمكن أن يتم في هذه الحالة بإختيار أحد المربعات القياسية الأربعة بطريقة

عشوائية ثم نرتب الأعمدة الأربعة في هذا المربع ثم الصفوف الثلاثة الأخيرة بطريقة عشوائية. (وبالطبع يمكن أيضاً إختيار إحدى الترتيبات الـ 576، في حال توفرها جميعاً أمام المجرب، بطريقة عشوائية). ويمكن إتباع نفس الطريقة العشوائية من أجل المربعات 5 × 5 و 6 × 6. ومن أجل المربعات الأكبر توجد طريقة للحصول على ترتيبة عشوائية للمربع المطلوب سنعرضها فيما يلي، ومن الملحوظ أنها تولّد كل الترتيبات الممكنة ولكنها غير منصفة من حيث أنها لا تمنح كل الترتيبات الممكنة فرصاً متساوية في أن يقع عليها الإختيار. ونجمل خطوات هذه الطريقة على الشكل التالي :

(i) نوزع الحروف في الصف الأول بطريقة عشوائية، وهذا يمكن أن يُنتج، في حال وجود k حرفاً، !k من تباديل الأحرف.

(ii) نوزع الحروف الـ (k−1) الباقية بصورة عشوائية في الوحدات الباقية من العمود الأول، وهذا يمكن أن يتم بِـ !(k−1) من الطرق.

(iii) نستمر بهذه الطريقة حتى نملأ جميع الصفوف والأعمدة مستثنين في كل صف وعمود الأحرف التي تكون قد استُخدمت في هذا الصف أو العمود.

ولتوضيح الحسابات التي يتضمنها تحليل البيان الإحصائي الناتج عن تصميم المربع اللاتيني سندرس المثال الثاني. ولنفرض أن النتائج في مثل هذه التجربة هي النتائج المعطاة في الجدول (١٢ ـ ١٦) حيث تشير الأحرف إلى الماكينات الأربع.

ونفرض، بصورة عامة، أنه يمكن التعبير عن الملاحظات وفق النموذج :

$$Y_{ij(k)} = \mu + \rho_i + \gamma_j + \tau_k + \varepsilon_{ij(k)} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, m \end{array} \qquad (54)$$

حيث ρ_i هو تأثير الصف i و γ_j تأثير العمود j و τ_k تأثير المعالجة k وأن :

$$\sum_{i=1}^{m} \rho_i = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j = \sum_{k=1}^{m} \tau_k = 0 \qquad (55)$$

والمتحولات $\varepsilon_{ij(k)}$ مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت يساوي σ^2. ونضع الدليل k بين قوسين للتذكير بأنه غير مستقل عن i و j .

جدول ١٢ ـ ١٦ عدد القطع التي تنتجها أربع ماكينات في تصميم مربع لاتيني
(التوزيع العشوائي للماكينات مبين بواسطة الحروف بين قوسين)

الفترات الزمنية	العمال			
	1	2	3	4
1	31 (C)	43 (D)	67 (A)	36 (B)
2	39 (D)	96 (A)	40 (B)	48 (C)
3	57 (B)	33 (C)	40 (D)	84 (A)
4	85 (A)	46 (B)	48 (C)	50 (D)

يمكن حساب مجاميع المربعات التالية :

$$\text{مجموع المربعات الكلي} = SS = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(Y_{ij(k)} - \bar{Y})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ij(k)}^2 - \frac{T^2}{m^2} \qquad (56)$$

$$\text{مجموع مربعات الصفوف} = SSR = m\sum_{i=1}^{m}(\bar{Y}_{i.(.)} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_i^2 - \frac{T^2}{m^2} \qquad (57)$$

$$\text{مجموع مربعات الأعمدة} = SSC = m\sum_{j=1}^{m}(\bar{Y}_{.j(.)} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} C_j^2 - \frac{T^2}{m^2} \qquad (58)$$

$$\text{مجموع مربعات المعالجات} = SST = m\sum_{k=1}^{m}(\bar{Y}_{..(k)} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} T_k^2 - \frac{T^2}{m^2} \qquad (59)$$

$$\text{مجموع مربعات الخطأ} = SSE = SS - SSR - SSC - SST \qquad (60)$$

$$T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} Y_{ij(k)} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} Y_{ij(k)} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} Y_{ij(k)}$$ = المجموع الإجمالي للملاحظات

R_i = مجموع الملاحظات في الصف i

C_j = مجموع الملاحظات في العمود j

T_k = مجموع الملاحظات التي تتلقى المعالجة k .

وفي مثالنا نجد :

$$SS = (31)^2 + \ldots + (50)^2 - \frac{(843)^2}{16} = 5959.438$$

مجموع مربعات الصفوف

$$= SSR = \frac{(177)^2 + (223)^2 + (214)^2 + (229)^2}{4} - \frac{(843)^2}{16} = 408.188$$

مجموع مربعات الأعمدة

$$= SSC = \frac{(212)^2 + (218)^2 + (195)^2 + (218)^2}{4} - \frac{(843)^2}{16} = 88.688$$

مجموع مربعات المعالجات

$$= SST = \frac{(332)^2 + (179)^2 + (160)^2 + (172)^2}{4} - \frac{(843)^2}{16} = 4946.688$$

مجموع مربعات الخطأ

$$= SSE = 5959.438 - 408.188 - 88.688 - 4946.688 = 515.874$$

وتحليل التشتت بصورة عامة مبين في الجدول (١٢ ـ ١٧). أما تحليل التشتت الموافق للبيان الإحصائي في (١٢ ـ ١٦) فهو مبين في الجدول (١٢ ـ ١٨).

جدول ١٢ ـ ١٧ تحليل التشتت من أجل تصميم المربع اللاتيني $m \times m$

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
الصفوف	$m - 1$	SSR	$MSR = SSR/(m-1)$	$\sigma^2 + \frac{m}{m-1}\sum_{i=1}^{m} \rho_i^2$
الأعمدة	$m - 1$	SSC	$MSC = SSC/(m-1)$	$\sigma^2 + \frac{m}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^2$
المعالجات	$m - 1$	SST	$MST = SST/(m-1)$	$\sigma^2 + \frac{m}{m-1}\sum_{k=1}^{m} \tau_k^2$
الخطأ التجريبي	$(m-1)(m-2)$	SSE	$MSE = \frac{SSE}{(m-1)(m-2)}$	σ^2
المجموع	$m^2 - 1$	SS		

جدول ١٢ ـ ١٨ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٢ ـ ١٦) .

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
الفترات الزمنية	3	408.188	136.06	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{i=1}^{4} \rho_i^2$
العمال	3	88.688	29.56	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{j=1}^{4} \gamma_j^2$
الماكينات	3	4946.688	1648.90	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{4} \tau_k^2$
الخطأ	6	515.874	85.98	σ^2
المجموع	15	5959.438		

وبالنظر لطبيعة الترتيبة العشوائية في هذا التصميم لا يمكننا إختبار فرضيات حول تأثيرات الصفوف أو الأعمدة . وإنما الفرضية الوحيدة التي يمكن إختبارها هي الفرضية $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_m = 0$. بالإضافة طبعاً إلى الفرضيات المتعلقة بمقارنات متعامدة بين المعالجات . ولاختبار الفرضية $H_0: \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$ أي للفرضية بأنــه لا توجـد فروق بين إنتاجيـة الماكينات نحسب النسبة $F = \frac{MST}{MSE} = \frac{1648.9}{85.98} = 19.18$ ونقارنها مع $F_{.01}(3, 6) = 9.78$. وبما أن $9.78 < 19.18$ نرفض الفرضية H_0 ونقرر وجود فروق بين إنتاجية الماكينات .

١٢ ـ ١١ فقدان ملاحظات في تصميم المربع اللاتيني : بصورة مشابهة لما رأيناه في تصميم الزمرة التامة العشوائية توجد طرق تساعد الباحث على تخطيّ الصعوبات الناشئة عن غياب ملاحظة أو أكثر من نتائج التجربة . وسنناقش هنا حالة غياب ملاحظة واحدة فقط . وفي هذه الحالة يمكن تقدير الملاحظة الغائبة M من العلاقة :

$$\hat{M} = \frac{m\,(R + C + T) - 2S}{(m - 1)\,(m - 2)} \qquad (61)$$

حيث :

R = مجموع الملاحظات في نفس الصف الذي يحوي الملاحظة الغائبة .

C = مجموع الملاحظات في نفس العمود الذي يحوي الملاحظة الغائبة .

T = مجموع الملاحظات التي تلقت نفس المعالجة التي تلقتها الملاحظة الغائبة .

S = مجموع كل الملاحظات المتوفرة .

وبعد تبديل القيمة المقدّرة $\hat{M}$ في جدول البيان الإحصائي نحسب مجاميع المربعات المختلفة كالمعتـاد ولكن يجب أن نتذكر أن مجموع مربعات المعالجات الناتج سيكون منحازاً بالزيادة (أي أن توقعه أكبر من توقع متوسط مربعات المعالجات المبين في الجدول (١٢ ـ ١٧) ، ولا بد من القيام بالتصحيح المناسب

قبل اختبار الفرضية $H_0: \tau_k = 0$. $(k = 1, ..., m)$. ومجموع مربعات المعالجات المصحح معطى بالعلاقة :

$$SST' = SST - Z \quad (62)$$

حيث :

$$Z = \frac{[S - R - C - (m-1) T]^2}{(m-1)^2 (m-2)^2} \quad (63)$$

ونخفض بمقدار الواحد عدد درجات الحرية الموافق للمجموع الكلي وعدد درجات الحرية الموافق لمجموع مربعات الخطأ .

١٢ ـ ١٢ ملاحظات إضافية تتعلق بتصميم المربع اللاتيني : سنناقش في هذه الفقرة وبإختصار شديد القضايا التالية . (i) وجود أكثر من ملاحظة واحدة في كل وحدة تجريبية ، (ii) المقارنات بين المعالجات و (iii) دراسات تراجعية للمركبات الخطية ، التربيعية ، الخ . لمنحنيات الإستجابة التي تبين تأثير المستويات المختلفة لتطبيق معالجة معينة . وكما نتوقع فإن معالجة هذه القضايا في تصميم المربع اللاتيني مماثلة تماماً لتلك التي ناقشاها في الفقرات (١٢ ـ ٧) ، (١٢ ـ ٥) و(١٢ ـ ٩) ، على الترتيب ، ولا حاجة للتكرار في تفاصيل المناقشة .

في حال وجود ملاحظة في كل خلية من خلايا تصميم المربع اللاتيني . يمكننا أن نحسب كالمعتاد مجاميع المربعات العائدة للصفوف ، الأعمدة ، المعالجات ، ومجموع المربعات الكلي . إلا أنه لحساب مجموع مربعات الخطأ التجريبي لا بد أولاً من الحصول على مجموع المربعات الموافق لِـ « ما بين الخلايا » ولنرمز له بِـ SSA ، وهو يقيس التغير بين مجاميع الخلايا الـ m^2 التي يحويها تصميم المربع اللاتيني . وبعدها نحصل على مجموع مربعات الخطأ التجريبي كما يلي :

$$SSE = SSA - SSR - SSC - SST \quad (64)$$

ومجموع مربعات خطأ العينة هو :

$$SSP = SS - SSA \qquad (65)$$

وتحليل التشتت الموافق معطى في الجدول (١٢ ـ ١٩) . أما إحصاء الإختبار للفرضية $H_0: \tau_1 = ... = \tau_m = 0$ فهو النسبة :

$$F = \frac{\text{متوسط مربعات المعالجات}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}} = \frac{MST}{MSE} \qquad (66)$$

ونرفض الفرضية H_0 عند المستوى α إذا كان $F > F_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ حيث

$\nu_1 = m-1$ $\nu_2 = (m-1)(m-2)$

جدول ١٢ ـ ١٩ تحليل التشتت في المربع اللاتيني $m \times m$ بـ n ملاحظة في كل خلية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات
الصفوف	$m-1$	SSR	$MSR = SSR/(m-1)$
الأعمدة	$m-1$	SSC	$MSC = SSC/(m-1)$
المعالجات	$m-1$	SST	$MST = SST/(m-1)$
الخطأ التجريبي	$(m-1)(m-2)$	SSE	$MSE = SSE/(m-1)(m-2)$
خطأ العينة	$m^2(n-1)$	SSP	$MSP = SSP/[m^2(n-1)]$
المجموع	m^2n-1	SS	

وإذا قررنا إختبار عدد من المقارنات قبل تنفيذ التجربة فيمكن القيام بذلك بطريقة مطابقة تماماً لما رأيناه في حالة تصميم الزمرة التامة العشوائية في الفقرة (١٢ ـ ٥) . وكذلك بالنسبة للدراسة التراجعية للمركبات الخطية التربيعية ، الخ . لمنحنيات الإستجابة ، في تجربة لدراسة الفروق بين تأثيرات

مستويات مختلفة لمعالجة معينة ، فإنها تتم هنا بنفس الطريقة وبإستخدام نفس العلاقة (53) التي رأيناها في الفقرة (١٢ ـ ٩) في حالة تصميم الزمرة التامة العشوائية. والتعديل الوحيد المطلوب هو ملاحظة أن $b = t = m$ في حالة المربع اللاتيني.

١٢ ـ ١٣ فعالية تصميم المربع اللاتيني بالنسبة للتصميم التام العشوائية وتصميم الزمرة التامة العشوائية : إذا رمزنا بـ R ، C ، و E لمتوسط مربعات الصفوف ، الأعمدة ، والخطأ التجريبي ، على الترتيب ، في تصميم المربع اللاتيني ، فيمكن حساب فعالية هذا التصميم بالنسبة للتصميم التام العشوائية من العلاقة :

$$R.E. = \frac{R + C + (m - 1)\,E}{(m + 1)\,E} \qquad (67)$$

وفعاليته بالنسبة لتصميم الزمرة التامة العشوائية ، مفترضين أن الصفوف قد استُخدمت زمراً ، معطاة بالعلاقة :

$$R.E. = \frac{C + (m-1)\,E}{m\,E} \qquad (68)$$

وإذا استُخدمت الأعمدة زمراً تصبح العلاقة (68) على الشكل :

$$R.E. = \frac{R + (m-1)\,E}{m\,E} \qquad (69)$$

تمارين

١ ـ البيان الإحصائي التالي ناتج عن تجربة منفذة وفق تصميم الزمرة التامة العشوائية . والمطلوب إتمام تحليل التشتت ، وإختبار الفرضية بأن التأثيرات الحقيقية للمعالجات الأربع متساوية . أعرض جميع الفروض التي تستند إليها للقيام بهذا الإختبار .

الزمر	المعالجات			
	1	2	3	4
1	20	18	16	17
2	18	18	16	20
3	20	18	17	18
4	20	16	20	17
5	19	16	16	20

٢ ـ يقدم البيان الإحصائي التالي زيادة أوزان الخنازير في تجربة لمقارنة رواتب غذائية يومية مختلفة والمطلوب تحليل وتفسير البيان مع إعطاء أهمية خاصة للمقارنة بين الرواتب الغذائية I ، II ، III مع الراتبين الغذائيين IV و V .

التكرارات	الراتب I	الراتب II	الراتب III	الراتب IV	الراتب V
1	165	168	164	185	201
2	156	180	156	195	189
3	159	180	189	186	173
4	167	166	138	201	193
5	170	170	153	165	164
6	146	161	190	175	160
7	130	171	160	187	200
8	151	169	172	177	142
9	164	179	142	166	184
10	158	191	155	165	149

٣ ـ فيما يلي تصميم زمرة تامة عشوائية بقيمتين مفقودتين . والمطلوب تقدير القيمتين المفقودتين وإتمام تحليل التشتت .

الزمر	المعالجات				
1	43	35	37	42	157
2	45	39	40	47	171
3	42	30	M″	43	115 + M″
4	M′	43	48	49	140 + M′
5	41	34	36	44	155
مجموع المعالجات	171 + M′	181	161 + M″	225	738 + M′ + M″

٤ ـ استخدمنا تصميم المربع اللاتيني 5 × 5 لإختبار تأثيرات خمسة أنواع من الأسمدة على إنتاج البطاطا ، وكانت نتائج التجربة كما يلي :

الصف	العمود					مجموع الصف
	1	2	3	4	5	
1	A 449	B 444	C 401	D 299	E 292	1885
2	B 463	C 375	D 323	E 264	A 415	1840
3	C 393	D 353	E 278	A 404	B 425	1853
4	D 371	E 241	A 441	B 410	C 392	1855
5	E 258	A 430	B 450	C 385	D 347	1870
مجموع العمود	1934	1843	1893	1762	1871	9303

مجموع المعالجات

A:2139	B:2192	C:1946	D:1693	E:1333	

٥ ـ فيما يلي إنتاج قصب السكر (قنطار انكليزي في كل $\frac{1}{40}$ من الفدان

وهي مساحة الوحدة التجريبية) في تجربة مربع لاتيني لمقارنة خمسة أنواع من الأسمدة :

A 14	E 22	B 20	C 18	D 25
B 19	D 21	A 16	E 23	C 18
D 23	A 15	C 20	B 18	E 23
C 21	B 46	E 24	D 21	A 18
E 23	C 16	D 23	A 17	B 19

حيث :

A : لا سماد

B : سماد غير عضوي

C : 10 طن سماد في الفدان

D : 10 طن سماد في الفدان .

E : 30 طن سماد في الفدان .

ما هي النتائج المستخلصة من هذه التجربة .

٦ ــ جربنا 5 مستويات من سماد معين في مربع لاتيني 5 × 5 ، وكان تحليل التشتت كما يلي :

	درجات الحرية	متوسط المربعات
الصفوف	4	25
الأعمدة	4	20
المعالجات	4	28
الخطأ	12	15

وكان مجموع الإنتاج في الوحدات الخاصة بكل مستوى كما يلي :

المستوى	1	2	3	4	5
مجموع الإنتاج	2	14	26	30	28

والمطلوب تجزئة مجموع مربعات المعالجات إلى :

	درجات الحرية
مركبة خطية	1
مركبة تربيعية	1
الباقي	2

هل توجد أية مقارنة هامة ؟

٧ ـ نُفذت تجربة لقياس قطر التيلة بالميكرون على غلاف بذرة القطن في النوع 128 من أنواع القطن المكسيكي ، وذلك في ستة مناطق مختلفة . وتمت القياسات على عينة من عشر بذور . فكانت النتائج كما في الجدول التالي :

البذرة	المنطقـة						المجموع
	1	2	3	4	5	6	
A	16.49	17.80	17.45	16.75	17.54	17.54	103.66
B	15.45	15.96	15.71	14.13	14.40	14.40	90.05
C	16.23	15.96	16.49	14.92	14.66	14.92	93.18
D	18.33	17.28	16.49	16.49	17.28	17.80	103.67
E	16.49	18.33	17.54	17.02	17.28	18.06	104.72
F	16.49	17.54	17.05	15.71	15.45	14.66	96.90
G	15.96	15.71	16.23	16.49	15.18	16.49	96.06
H	16.75	16.23	14.66	15.96	13.35	16.75	93.70
I	14.40	18.33	17.02	14.66	15.71	17.02	97.14
J	16.49	17.02	16.75	17.54	15.71	16.49	100.00
المجموع	163.08	170.16	165.48	159.67	156.56	164.13	979.08

أ ــ بين أن تحليل التشتت التالي صحيح واملأ درجات الحرية :

مصدر التغير	درجات الحرية	متوسط المربعات
البذور		4.15
المناطق		2.22
الخطأ		.692

ب ــ ماذا يمكنك القول فيما يتعلق بالفروق بين المناطق ؟

ج ــ ما هو الإنحراف المعياري لمتوسط المنطقة ؟

د ــ ما هي حدود الثقة للفرق بين متوسطي المنطقتين 1 و 6 ؟

الفصل الثالث عشر

التجارب العاملية

١٣ ـ ١ مقدمة وإصطلاحات : عرضنا في الفصلين الحادي عشر والثاني عشر الخطوات الحسابية المناسبة التي تتضمنها طريقة تحليل التشتت في عدد من التصاميم . وينبغي أن يكون القاريء قد أكتسب الآن خبرة معينة في مجال حساب مجاميع المربعات العائدة إلى مصادر التغير المختلفة ، ودرجات الحرية الموافقة لكل من هذه المجاميع . إلا أنه توجد حالات لا يكون مثل هذا الحساب ومثل هذا التقسيم لدرجات الحرية واضحاً وسهلاً . وسنناقش في هذا الفصل حالات من هذا النوع .

ولإيضاح ما نقصده بكلمة « العوامل » نذكر بعض الأمثلة . فغالباً ما يواجه الباحث حالات يجري فيها تصنيف المعلومات الإحصائية (تصنيفاً مستقلاً عن الزمر ، الصفوف ، الأعمدة ، أو التكرارات) وفقاً لعاملين أو أكثر . وبصورة عامة يحصل ذلك في سياق تصنيف أكثر تفصيلاً للمعالجات . ونشير عادة للبيان الإحصائي الذي يحوي عاملين أو أكثر بالبيان الإحصائي العاملي أو إختصاراً « العاملي » . فعلى سبيل المثال ، يمكن في تجارب على الحيوانات ، تصنيفها وفقاً للسلالة ، الجنس ، الأب ، نظام التغذية ، الخ . وفي التجارب الحقلية يمكن أن يتضمن السماد عدة تراكيب مختلفة من النتروجين والفوسفور . وفي دراسات علم الإجتماع وعلم النفس نميز الأشخاص عادة وفقاً للعمر ، الجنس ، التربية ، الخ . ويمدّنا الإقتصاد المنزلي بأمثلة

عديدة عن تصنيفات عاملية للمعالجات ؛ فعلى سبيل المثال ، تكون المعالجات المختلفة ، في تجارب تتعلق بالغسل المنزلي ، عبارة عن تراكيب مختلفة للعوامل الخمسة التالية : (i) الفترة الزمنية للغسيل ، (ii) نوع الماء (يسر أو عسر) ، (iii) درجة حرارة الماء ، (iv) نوع ماكينة الغسيل ، و (v) نوع المنظف المستخدم . ويمكن العثور على أمثلة مشابهة في كل حقل من حقول البحث .

ولكي نسهل على القارىء متابعة محتويات الفصل سنشير بالتفصيل للرموز المستخدمة من أجل العوامل المختلفة . والرموز المتبناة للعوامل في مؤلفات الإحصاء هي ، بصورة عامة ، الأحرف اللاتينية الصغيرة . فمثلاً يمكن أن نرمز للعوامل الخمسة في تجربة الغسيل المذكورة أعلاه كما يلي :

m = نوع ماكينة الغسيل .

a = نوع المنظف .

b = نوع الماء .

c = درجة الماء .

d = طول فترة الغسل .

ويهتم الباحث ، كما نعلم ، بالنتائج المترتبة على تغيرات في واحد أو أكثر من هذه العوامل . فقد يوجد نوعان من ماكينات الغسيل ، نوعان من المنظفات ، نوعان من الماء ، درجتا حرارة مختلفتين ، وفترتان ممكنتان لعملية الغسل . وتعرف هذه القيم أو التصنيفات المختلفة للعوامل بمستويات العوامل . فلكل عامل من العوامل الخمسة في تجربة الغسيل مستويان . وفي إحدى تجارب علم الحركة يمكن أن تكون العوامل هي : (i) المسافة ، (ii) الوزن ، (iii) زوج من العمال . ويمكن أن تتناول التجربة ثلاث مستويات من المسافة (d_1, d_2, d_3) وعشر مستويات من الأوزان $(w_1, w_2, ..., w_{10})$ وأربع أزواج من العمال نرمز لها بِـ (o_1, o_2, o_3, o_4) . ولدينا هنا ثلاثة عوامل الأول بثلاثة مستويات

والثاني بعشرة مستويات والثالث بأربعة مستويات . وعندما نقول أربعة مستويات من أزواج العمال لا نقصد أكثر من أربعة أزواج مختلفة من العمال . ولذلك يجب ألا يحاول القارىء ان يفهم من كلمة مستوى أكثر مما تجيزه طبيعة العامل المدروس .

ونحب أن نلفت إنتباه القارىء إلى الإختيار غير الموفق لتعابير أصبحت مألوفة في بعض الكتب الإحصائية كأن نقول « التصميم العاملي » ، بينما التعبير الأدق في حالة تصميم الزمرة التامة العشوائية ، مثلاً ، هو القول « تصميم الزمرة التامة العشوائية بترتيبات عاملية للمعالجات » . وإستخدام كلمة « عاملي » تشير حقيقة إلى كيفية تشكيل المعالجات في تصميم معين وليس إلى التصميم الأساسي نفسه . وبعض الكتّاب يشيرون إلى هذه الحقيقة بالقول « بتجارب عاملية » وليس تصاميم عاملية . وهو التعبير الذي إستخدمناه في هذا الكتاب .

وبالعودة إلى تجربة الحركة المذكورة أعلاه نرى أنه توجد 120 معالجة أو ، كما نعبر عنه عادة ، « تركيب معالجة » يجب أخذها بعين الإعتبار . ونشكل هذه التراكيب بأن نأخذ بعين الإعتبار المستويات العشرة للوزن ، المستويات الثلاثة للمسافة ، والمستويات الأربعة لأزواج العمال ، فنحصل على $10 \times 3 \times 4 = 120$ تركيباً ممكناً . أما في تجربة الغسل المنزلي فيوجد خمسة عوامل ولكل عامل مستويان وبالتالي لدينا $2^5 = 32$ تركيب معالجة .

وكمثال آخر لنفرض أننا نرغب في دراسة إستجابة محصول نوع معين من الحبوب لمعدّلين مختلفين في البذر ، عمقين مختلفين في الزرع ، وثلاثة مستويات في تطبيق سماد معين . فهذه التجربة تحوي $2 \times 2 \times 3 = 12$ تركيب معالجة نرمز لها على الشكل :

$$\begin{array}{cccc} a_1 b_1 c_1 & a_1 b_2 c_1 & a_2 b_1 c_1 & a_2 b_2 c_1 \\ a_1 b_1 c_2 & a_1 b_2 c_2 & a_2 b_1 c_2 & a_2 b_2 c_2 \\ a_1 b_1 c_3 & a_1 b_2 c_3 & a_2 b_1 c_3 & a_2 b_2 c_3 \end{array}$$

حيث يرمز a للعامل الأول وهو معدل البذر ، b للعامل الثاني وهو عمق

الزراعة ، و c للعامل الثالث وهو مستوى تطبيق السماد ، أما الدليل تحت كل رمز فيشير إلى المستوى المستخدم لهذا العامل . وهكذا يرمز تركيب المعالجة $a_i b_j c_k$ إلى أننا نستخدم العامل a عند المستوى i ، والعامل b عند المستوى j ، والعامل c عند المستوى k $(i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad k = 1, 2, 3,)$ والطريقة الرمزية المختصرة المستخدمة عادة للدلالة على تراكيب المعالجة هو أن نكتفي بكتابة الدليل الرقمي الذي يشيرإلى مستوى العامل بينما يشيرترتيب ورود الدليل إلى العامل بعد أن نكون قد رتبنا العوامل كعامل أول ثم ثان ثم ثالث الخ . فإذا أعتبرنا ترتيب العوامل وفقاً لورود ذكرها في المثال السابق فيمكن التعبير عن تراكيب المعالجة الإثنتي عشرة على الشكل :

111	121	211	221
112	122	212	222
113	123	213	223

ونشير عادة إلى مثل هذه التجربة بأنها تجربة $3 \times 2 \times 2$ عاملي دون الإشارة إلى التصميم الأساسي المستخدم . وبصورة مماثلة نقول أن تجربة الحركة هي $4 \times 10 \times 3$ عاملي ونفهم من ذلك أنها تجربة تحوي ثلاثة عوامل للأول منها ثلاثة مستويات وللثاني عشرة مستويات وللثالث أربعة مستويات . أما تجربة الغسل المنزلي فهي 2^5 عاملي وهذا يعني أنها تحوي خمسة عوامل وكل منها يقع في مستويين .

ونؤكد ثانية بأنه يمكن فرض ترتيب عاملي للمعالجات على أي تصميم معين فتوضع تراكيب المعالجة في إطارالتصميم التام العشوائية أو تصميم الزمرة التامة العشوائية أو تصميم المربع اللاتيني . وسنقتصر في هذا الفصل على دراسة تجارب عاملية توضع في إطار تصميم الزمرة التامة العشوائية . وفي هذه الحالة نشير عادة للزمر على أنها تكرارات .

١٣ ــ ٢ مثال يحوي عاملين : ليكن البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ــ ١) .

والخطوة الأولى في الحسابات هي إعتبار المعلومات الإحصائية ناتجة عن تصميم الزمرة التامة العشوائية بإثنتي عشرة معالجة . وعندئذ نحسب ، كما رأينا في الفصل الثاني عشر ، مجاميع المربعات التالية :

جدول ١٣ ـ ١ بيان إحصائي افتراضي لتوضيح حساب مجاميع المربعات في تجربة عاملية 3×4 مخططة وفق تصميم الزمرة التامة العشوائية .

التكرارات	a_1			a_2			a_3			a_4			مجموع التكرار
	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3	
1	128	34	16	152	40	118	76	102	132	180	220	60	1258
2	42	134	18	128	88	80	158	96	60	90	220	48	1162
3	136	172	46	216	76	93	168	162	68	150	156	160	1603
مجموع المعالجة	306	340	80	496	204	291	402	360	260	420	596	268	

مجموع المربعات الكلي $= SS = (128)^2 + \ldots + (160)^2 - \frac{(4023)^2}{36}$

$= 114818.8$

مجموع مربعات التكرارات $= SSR = \frac{(1258)^2 + (1162)^2 + (1603)^2}{12}$

$- \frac{(4023)^2}{36} = 8964.5$

مجموع مربعات المعالجات $= SST = \frac{(306)^2 + \ldots + (268)^2}{3} - \frac{(4023)^2}{36}$

$= 67160.8$

مجموع مربعات الخطأ $= SSE = 114818.8 - 8964.5 - 67160.8 = 38693.5$

إلا أننا نعلم عن المعالجات أكثر مما تقدمه لنا هذه الحسابات . فالمعالجات في هذه الحالة هي كل التراكيب الممكنة بين المستويات الأربعة للعامل a والمستويات الثلاثة للعامل b . وهكذا يبدو ملحاً أن نقسم مجموع مربعات المعالجات بما يتفق وهذه المعلومات الإضافية . ولذلك نحسب :

SSA = مجموع المربعات الموافق للمستويات المختلفة لـ a

$$= \frac{(726)^2 + (991)^2 + (1022)^2 + (1284)^2}{9} - \frac{(4023)^2}{36} = 17351.7$$

SSB = مجموع المربعات الموافق للمستويات المختلفة لـ b

$$= \frac{(1624)^2 + (1500)^2 + (899)^2}{12} - \frac{(4023)^2}{36} = 25061.2$$

ولكن عندما نجمع هذه المجاميع نجد 42412.9 ، وهو أقل بـ 24747.9 من مجموع مربعات المعالجات . فكيف نعلل هذا الفرق؟ وإلى أي مصدر من مصادر التغير ننسبه؟ والجواب هو أننا ننسب هذا الفرق إلى التفاعل بين العاملين a و b ونرمز له بالرمز SS (AB) . (سنعرف التفاعل بين عاملين في حينه) .

وكما رأينا في تصميم الزمرة التامة العشوائية فإن درجات الحرية الموافقة للتكرارات (أي الزمر) ، المعالجات ، والخطأ التجريبي هي ، على الترتيب ، 2 ، 11 ،و 22 . ونقسم درجات الحرية الموافقة للمعالجات بما يتفق و SSA ، SSB ،و SS (AB) أي 3 ، 2 ، 6 ، على الترتيب . وقد حصلنا على درجات الحرية الموافقة لعامل بطرح واحد من عدد المستويات الموافقة لهذا العامل . وعدد درجات الحرية للتفاعل بين عاملين هو جداء عددي درجات الحرية الموافقين لهذين العاملين . وهكذا نجد في مثالنا أن للعامل a أربعة مستويات وبالتالي يكون عدد درجات الحرية الموافق لـ SSA هو 3 ، وبصورة مماثلة فإن عدد درجات الحرية الموافق لـ SSB هو 2 ، ويكون إذن عدد درجات الحرية الموافق لـ SS (AB) هو $3 \times 2 = 6$. ونكتب تحليل التشتت كما في الجدول (١٣ ـ ٢) .

جدول ١٣ ـ ٢ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ١)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات
التكرارات	2	8964.5	4482.25
المعالجات	11	67160.8	6105.53
A	3	17351.7	5783.90
B	2	25061.2	12530.60
AB	6	24747.9	4124.65
الخطأ التجريبي	22	38693.5	1758.79
المجموع	35	114818.8	

١٣ ـ ٣ مفهوم التفاعل : ذكرنا في الفقرة السابقة التفاعل بين عاملين ، وسنقدم الآن تفسيراً لهذا المصطلح من خلال المثال التالي : فلنفرض أن العاملين a و b هما نوعان من السماد ، نيتروجين وفوسفور ، وأن لكل منهما مستويان إثنان (المستوى الأول هو معدّل 50 رطلاً إنكليزياً في الفدان والمستوى الثاني هو معدل 100 رطلاً انكليزياً في الفدان) ولنرمز لهذه الحالة كما يلي :

a_1 = النيتروجين بمعدل 50 رطلاً إنكليزياً في الفدان .

a_2 = النيتروجين بمعدل 100 رطلاً إنكليزياً في الفدان .

b_1 = فوسفور بمعدل 50 رطلاً إنكليزياً في الفدان .

b_2 = فوسفور بمعدل 100 رطلاً إنكليزياً في الفدان .

ويمكن تصوير الواقع الحقلي للتجربة على الشكل :

$a_1\ b_1$	$a_2\ b_1$
$a_1\ b_2$	$a_2\ b_2$

ولنفرض أن الإنتاج كان واحداً من الأشكال الثلاثة التالية :

I	a_1	a_2
b_1	63	67
b_2	69	73

II	a_1	a_2
b_1	63	67
b_2	69	78

III	a_1	a_2
b_1	63	67
b_2	69	70

فنلاحظ في الحالة I أنه إذا زدنا معدل تطبيق العامل a من a_1 إلى a_2 بينما العامل b مطبق على المستوى b_1 يزداد الإنتاج بمقدار 4 وحدات . وبصورة مشابهة إذا زدنا معدل تطبيق العامل a من a_1 إلى a_2 بينما العامل b مطبق على المستوى b_2 فإن الإنتاج يزداد أيضاً بمقدار 4 وحدات ،أي أن ما سببه الإنتقال بالعامل a من المستوى a_1 إلى a_2 من زيادة في الإنتاج لم يتأثر بكون العامل b مطبقاً وفق المستوى b_1 أو المستوى b_2 . ونقول في هذه الحالة أنه لا يوجد تفاعل بين العاملين a و b . وفي الحالة II نجد وضعاً مختلفاً ، فعندما زدنا معدل تطبيق العامل a من المستوى a_1 إلى المستوى a_2 إزداد

الإنتاج بمقدار 9 في حضور المستوى b_2 للعامل b ، بينما إزداد فقط بمقدار 4 في حضور المستوى b_1 . ونقول في هذه الحالة أنه يوجد تفاعل بين a و b بمقدار $9-4=5$. وبصورة مماثلة نجد ، في الحالة III أنه يوجد تفاعل بين العاملين بمقدار $1-4=-3$. والتفاعل السلبي يعني أن إنتاجية أحد العاملين تنخفض مع إرتفاع مستويات تطبيق العامل الآخر . وبعد هذا المثال التوضيحي نورد التعريف التالي للتفاعل :

التفاعل بين عاملين هو فشل مستويات أحد العاملين في الإحتفاظ بنفس النسبة من التأثير عبر مستويات العامل الآخر .

وهكذا فإن وجود التفاعل بين عاملين يؤدي ، عند تطبيقهما معاً ، إلى تأثيرات إضافية (سلبية أو إيجابية) لا تعود إلى أي منهما بمفرده .

وكمثال آخر لنفرض أن لكل من العاملين a و b ثلاثة مستويات مختلفة ولنفرض أن النتائج كانت كمايلي :

IV	a_1	a_2	a_3
b_1	10	13	16
b_2	13	16	19
b_3	16	19	22

V	a_1	a_2	a_3
b_1	22	10	14
b_2	25	13	17
b_3	30	18	22

VI	a_1	a_2	a_3
b_1	10	12	11
b_2	14	17	21
b_3	19	25	35

وإذا تأملنا الفروق في الإنتاج عند تغير مستويات b وذلك من أجل كل مستوى من مستويات a (ويمكن بصورة مشابهة تأمل الفروق في الإنتاج عند تغير مستويات a وذلك من أجل كل مستوى من مستويات b) فنجد في الحالة IV أن إتجاهات ومقادير هذه الفروق تبقى نفسها من أجل كل من مستويات a ، ولذلك فإن الحالة IV تمثل حالة عدم وجود تفاعل . وفي الحالة V نجد أيضاً ثبات الإتجاهات والمقادير (زيادة 3 من b_1 إلى b_2 وزيادة

5 من b_2 إلى b_3 من أجل كل من مستويات a ولذلك فهي تمثل أيضاً حالة عدم وجود تفاعل . وفي الحالة VI نلاحظ وضعاً مختلفاً فمقادير الزيادة عند الإنتقال من b_1 إلى b_2 هي 4 عند المستوي a_1 ،و 5 عند المستوى a_2 ،و 10 عند المستوى a_3 . وكذلك الأمر بالنسبة للتغير في الإنتاج عند الإنتقال من b_2 إلى b_3 ، فهي زيادة 5 عند المستوى a_1 ، وزيادة 8 عند المستوى a_2 ، وزيادة 14 عند المستوى a_3 ، وهذا يشير إلى وجود تفاعل بين العاملين a و b .

١٣ ـ ٤ الشروط التي نفترض تحققها عند تحليل التجارب العاملية وإختبار الفرضيات : في حالة تجربة تحوي عاملين ، ويجري تنفيذها وفق تصميم الزمرة التامة العشوائية ، ننطلق عادة من النموذج :

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, r \\ j = 1, 2, \ldots, a \\ k = 1, 2, \ldots, b \end{array} \qquad (1)$$

حيث :

$\mu =$ التأثير الرئيسي ،

$\rho_i =$ تأثير التكرار i ،

$\alpha_j =$ تأثير المستوى j من مستويات العامل a ،

$\beta_k =$ تأثير المستوى k من مستويات العامل b ،

$(\alpha\beta)_{jk} =$ تأثير تفاعل المستوى j من العامل a مع المستوى k من العامل b ،

$\varepsilon_{ijk} =$ الخطأ العشوائي الموافق للوحدة التجريبية من التكرار i الخاضعة لتركيب المعالجة (jk) ،

وحيث :

$$\sum_{i=1}^{r} \rho_i = \sum_{j=1}^{a} \alpha_j = \sum_{k=1}^{b} \beta_k = \sum_{j=1}^{a} (\alpha\beta)_{jk} = \sum_{k=1}^{b} (\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad (2)$$

والمتحولات العشوائية ε_{ijk} مستقلة فيما بينها ويتبع كل منها التوزيع الطبيعي

بمتوسط يساوي الصفر ونفس التشتت σ^2 . ويجب ألا يسبب إستخدام الحرف a للدلالة على عدد مستويات العامل a ، والحرف b للدلالة على عدد مستويات العامل b ، أي تشويش . وسيكون المعنى المقصود واضحاً دائماً عند إستخدام الرمز . وتحت هذه الفروض يمكننا البرهان على أن توقع متوسط المربعات هو كما يبين الجدول (١٣ ـ ٣). ونلخص الحسابات الضرورية للوصول إلى مجاميع المربعات المذكورة في هذا الجدول بالمعادلات التالية :

(3) مجموع المربعات الكلي $= SS = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} Y_{ijk}^2 - \frac{T^2}{rab}$

(4) مجموع مربعات التكرارات $= SSR = \frac{\sum_{i=1}^{r} R_i^2}{ab} - \frac{T^2}{rab}$

(5) مجموع مربعات ما بين الخلايا في الجدول a × b . $= SSC = \frac{\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} T_{jk}^2}{r} - \frac{T^2}{rab}$

(6) مجموع مربعات الخطأ . $= SSE = SS - SSR - SSC$

(7) مجموع المربعات الموافق للعامل a $= SSA = \frac{\sum_{j=1}^{a} A_j^2}{rb} - \frac{T^2}{rab}$

(8) مجموع المربعات الموافق للعامل b $= SSB = \frac{\sum_{k=1}^{b} B_k^2}{ra} - \frac{T^2}{rab}$

(9) مجموع المربعات الموافق للتفاعل بين a و b . $= SS(AB) = SSC - SSA - SSB$

حيث :

T = المجموع الكلي للملاحظات .

R_i = مجموع الملاحظات ضمن التكرار i ،

T_{jk} = الرقم الموجود في الخلية (jk) من الجدول $a \times b$ وهو مجموع الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a والمستوى k من العامل b .

A_j = مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a .

B_k = مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى k من العامل b .

ويمكن إستخدام تحليل التشتت في الجدول (١٣ ــ ٣) لإختبار الفرضيات الثلاث التالية :

H_0 : لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية للمستويات المختلفة للعامل a أي

$$H_0 : \alpha_j = 0; j = 1, \ldots, a \quad (10)$$

H_1 : لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية للمستويات المختلفة للعامل b أي :

$$H_1 : \beta_k = 0; k = 1, \ldots, b \quad (11)$$

H_2 : لا يوجد تفاعل بين العاملين a و b أي :

$$H_2 : (\alpha\beta)_{jk} = 0; j = 1, \ldots, a; k = 1, \ldots, b$$

ولاختبار هذه الفرضيات نحسب على التتالي :

$$F = \frac{SSA/(a-1)}{SSE/(r-1)(ab-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات التاثير A}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}} \quad (12)$$

$$F = \frac{SSB/(b-1)}{SSE/(r-1)(ab-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات التأثير B}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}} \quad (13)$$

جدول ١٣ ـ ٣ تحليل التشتت لتجربة عاملية تحوي عاملين ومنفذة وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائة .

مصدر التغير	درجات الحرية	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	r–1	SSR/(r–1)	$\sigma^2 + \frac{ab}{r-1} \sum_{i=1}^{r} \rho_i^2$
المعالجات :			
A	a–1	SSA/(a–1)	$\sigma^2 + \frac{rb}{a-1} \sum_{j=1}^{a} \alpha_j^2$
B	b–1	SSB/(b–1)	$\sigma^2 + \frac{ra}{b-1} \sum_{k=1}^{b} \beta_k^2$
AB	(a–1) (b–1)	SS(AB)/(a–1) (b–1)	$\sigma^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)} \sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} (\alpha\beta)_{jk}^2$
الخطأ التجريبي	(r–1) (ab–1)	SSE/(r–1) (ab–1)	σ^2
المجموع	rab–1		

$$F = \frac{SS(AB)/(a-1)(b-1)}{SSE/(r-1)(ab-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات التفاعل AB}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}} \quad (14)$$

ودرجات الحرية الموافقة لكل من هذه النسب واضحة من الجدول (١٣ ـ ٣) ، أو من المعادلات (12) ، (13) و (14) .

١٣ ـ ٥ **تجربة تحوي عاملين** : ولمساعدة القارىء في فهم النقاط الأساسية التي يشملها تحليل تجربة عاملية سندرس الآن تجربة زراعية تتعلق بفول الصويا . وتتألف المعالجات الثمانية في التجربة من تراكيب المعالجة الناتجة عن أربعة أنواع من الأسمدة ، وتاريخين مختلفين للزرع . والتصميم المستخدم هو تصميم الزمرة التامة العشوائية بأربع زمر (تكرارات) . والبيان الإحصائي موجود في الجدول (١٣ ـ ٤) . وبالقيام بالحسابات كما أجملناها في الفقرة السابقة نصل إلى تحليل التشتت المبين في الجدول (١٣ ـ ٥) .

جدول ١٣ ـ ٤ إنتاج فول الصويا بالبوشل من أجل كل فدان من الأرض

تاريخ الزرع	السماد	التكرارات			
		1	2	3	4
مبكر	لاسماد	28.6	36.8	32.7	32.6
	Aero	29.1	29.2	30.6	29.1
	Na	28.4	27.4	26.0	29.3
	K	29.2	28.2	27.7	32.0
متأخر	لاسماد	30.3	32.3	31.6	30.9
	Aero	32.7	30.8	31.0	33.8
	Na	30.3	32.7	33.0	33.9
	K	32.7	31.7	31.8	29.4

جدول ١٣ ـ ٥ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول ١٣ ـ٤

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	3	7.31	2.44	$\sigma^2 + \frac{8}{3}\sum_{i=1}^{4} \rho_i^2$
تاريخ الزرع	1	32.00	32.00	$\sigma^2 + 16\sum_{j=1}^{2} \alpha_j^2$
الأسمدة	3	16.40	5.47	$\sigma^2 + \frac{8}{3}\sum_{k=1}^{4} \beta_k^2$
الأسمدة x تاريخ الزرع	3	38.40	12.80	$\sigma^2 + \frac{4}{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4} (\alpha\beta)_{jk}^2$
الخطأ التجريبي	21	66.43	3.16	σ^2
المجموع	31	160.54		

ولإختبار الفرضية بأنه لا يوجد فرق بين تاثيري تاريخي الزرع على إنتاج فول الصويا نحسب $F = 32.00/3.16 = 10.12$ بـ $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = 21$ درجة من الحرية. وبما أن $F > F_{.05}(1, 21)$ فإننا نرفض الفرضية عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$. وإذا ألقينا نظرة على المتوسطات المناسبة نجد أن الزراعة المتأخرة أفضل.

ولإختبار الفرضية بعدم وجود فرق بين تأثيرات الأسمدة الأربعة نقارن $F = 5.47/3.16 = 1.73$ مع $F_{.05}(3, 21) = 3.07$ ، فنجد أننا لا نستطيع رفض الفرضية. وبما أن السبب الأساسي لإستخدام التجربة العاملية هو أن تمكن المجرب من تقصي وجود تفاعل بين العاملين وهما السماد وتاريخ الزرع ، فإننا نرغب في إختبار الفرضية بعدم وجود تفاعل بين العاملين ، ومن أجل ذلك نقارن $F = 12.80/3.16 = 4.05$ ، مع $F_{.05}(3, 21) = 3.07$ ونرفض الفرضية عند المستوى $\alpha = .05$. وبالتالي فإنه ينبغي أن تختلف التوصيات المتعلقة بالأسمدة في الزراعة المبكرة عنها في الزراعة المتأخرة.

١٣ ـ ٦ **حسابات تجربة عاملية تحوي ثلاثة عوامل** : ليس صعباً تعميم الطرق الحسابية المبينة في الفقرة (١٣ ـ ٤) والمتعلقة بعاملين إلى حالة ثلاثة عوامل. فالنموذج (١) يصبح في هذه الحالة :

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \gamma_l + (\alpha\gamma)_{jl} + (\beta\gamma)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{jkl} + \varepsilon_{ijkl}$$

$$i = 1, \ldots, r \; ; \; k = 1, \ldots, b \qquad (15)$$
$$j = 1, \ldots, a \; ; \; l = 1, \ldots, c$$

حيث تعاريف الحدود المختلفة مشابهة لتلك المعطاة في الفقرة (١٣ ـ ٤). وعند تحليل بيان إحصائي مما يمكن تمثيله بالنموذج (15) ، يكون تحليل التشتت كما هو مبين في الجدول (١٣ ـ ٦). ونلخص فيما يلي الحسابات الضرورية للوصول إلى المقادير المذكورة في الجدول (١٣ ـ ٦) :

$$SS = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} \sum_{l=1}^{c} Y_{ijkl}^2 - \frac{T^2}{rabc} \quad (16)$$

$$SSR = \frac{1}{abc} \sum_{i=1}^{r} R_i^2 - \frac{T^2}{rabc} \quad (17)$$

(18) مجموع مربعات ما بين الخلايا في الجدول $a \times b \times c$

$$= SS(abc) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} \sum_{l=1}^{c} T_{jkl}^2 - \frac{T^2}{rabc}$$

(19) مجموع مربعات ما بين الخلايا في الجدول $a \times b$

$$= SS(ab) = \frac{1}{rc} \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} T_{jk}^2 - \frac{T^2}{rabc}$$

(20) مجموع مربعات ما بين الخلايا في الجدول $a \times c$.

$$SS(ac) = \frac{1}{rb} \sum_{j=1}^{a} \sum_{l=1}^{c} T_{jl}^2 - \frac{T^2}{rabc}$$

(21) مجموع مربعات ما بين الخلايا في الجدول $b \times c$

$$SS(bc) = \frac{1}{ra} \sum_{k=1}^{b} \sum_{l=1}^{c} T_{kl}^2 - \frac{T^2}{rabc}$$

$$SSA = \frac{1}{rbc} \sum_{j=1}^{a} A_j^2 - \frac{T^2}{rabc} \quad (22)$$

$$SSB = \frac{1}{rac} \sum_{k=1}^{b} B_k^2 - \frac{T^2}{rabc} \quad (23)$$

$$SSC = \frac{1}{rab} \sum_{l=1}^{c} C_l^2 - \frac{T^2}{rabc} \quad (24)$$

$$SS(AB) = SS(ab) - SSA - SSB \quad (25)$$

$$SS(AC) = SS(ac) - SSA - SSC \quad (26)$$

$$SS(BC) = SS(bc) - SSB - SSC \quad (27)$$

$$SS(ABC) = SS(abc) - SSA - SSB - SSC - SS(AB) - SS(AC) - SS(BC) \quad (28)$$

$$SSE = SS - SSR - SS(abc) \quad (29)$$

حيث :

T = مجموع كل الملاحظات .

R_i = مجموع الملاحظات في التكرار i .

T_{jkl} = المجموع الموجود في الخلية jkl من الجدول a × b × c ، وهو مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a ، المستوى k من العامل b ، والمستوى l من العامل c .

T_{jk} = المجموع الموجود في الخلية jk من الجدول a × b ،وهو مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a ، والمستوى k من العامل b

T_{jl} = المجموع الموجود في الخلية jl من الجدول a × c ، وهو مجموع

كل الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a ، والمستوى l من العامل c .

T_{kl} = المجموع الموجود في الخلية kl من الجدول b × c ، وهو مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى k من العامل b ، والمستوى l من العامل c .

A_j = مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى j من العامل a .

B_k = مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى K من العامل b .

C_l = مجموع كل الملاحظات الموافقة للمستوى l من العامل c .

ويمكن بسهولة صياغة الفرضيات التي يمكن إختبارها بالإستفادة من عمود توقع متوسط المربعات المبين في الجدول (١٣ ـ ٦) . ونختبر جميع التأثيرات والتفاعلات بالمقارنة مع متوسط مجموع مربعات الخطأ التجريبي .

جدول ١٣ ـ ٦

تحليل التشتت من أجل تجربة عاملية بثلاث عوامل منفذة وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائية

مصدر التغير	درجات الحرية	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	r–1	SSR/(r–1)	$\sigma^2 + \frac{abc}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$
المعالجات :			
A	a–1	SSA/(a–1)	$\sigma^2 + \frac{rbc}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$
B	b–1	SSB/(b–1)	$\sigma^2 + \frac{rac}{b-1}\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2$
C	c–1	SSC/(c–1)	$\sigma^2 + \frac{rab}{c-1}\sum_{l=1}^{c}\gamma_l^2$
AB	(a–1) b–1)	SS(AB)/(a-1)(b-1)	$\sigma^2 + \frac{rc}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk}^2$
AC	(a–1) (c–1)	SS(AC)/(a–1)(c–1)	$\sigma^2 + \frac{rb}{(a-1)(c-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{l=1}^{c}(\alpha\gamma)_{jl}^2$
BC	(b–1) (c–1)	SS(BC)/(b-1)(c–1)	$\sigma^2 + \frac{ra}{(b-1)(c-1)}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(\beta\gamma)_{kl}^2$
ABC	(a–1) (b–1) (c–1)	SS(ABC)/(a–1) (b–1) (c–1)	$\sigma^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)(c-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\sum_{l=1}^{c}(\alpha\beta\gamma)_{jkl}^2$
الخطأ التجريبي	(r–1) (abc–1)	SSE/(r–1) (abc–1)	σ^2
المجموع الكلي	rabc–1		

١٣ ـ ٧ بيان إحصائي لتوضيح حسابات تجربة عاملية بثلاثة عوامل منفذة في إطار تصميم الزمرة التامة العشوائية .

التكرار		a_1				a_2				a_3			
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4
1	c_1	3	10	9	8	24	8	9	3	2	8	9	8
	c_2	4	12	3	8	22	7	16	2	2	2	7	2
	c_3	5	10	5	8	23	9	17	3	2	8	6	3
2	c_1	2	10	9	8	29	16	11	3	2	7	5	3
	c_2	7	10	5	8	28	18	10	6	6	6	5	9
	c_3	9	10	27	8	28	16	11	7	8	9	8	15
3	c_1	8	10	2	8	27	16	15	8	2	15	7	14
	c_2	7	9	2	7	27	15	12	7	7	16	1	13
	c_3	15	7	6	15	30	14	12	5	11	18	3	8
4	c_1	1	6	8	14	14	13	8	5	9	30	9	2
	c_2	14	5	7	15	34	11	9	5	13	11	8	3
	c_3	8	6	4	18	16	12	13	15	17	8	7	16
5	c_1	7	8	9	6	18	10	2	16	14	7	6	11
	c_2	7	9	8	2	19	9	12	12	13	6	6	12
	c_3	7	17	3	10	17	10	20	9	9	8	6	17
6	c_1	8	1	10	12	3	8	8	4	11	2	2	9
	c_2	7	6	12	3	3	15	8	4	12	3	2	10
	c_3	3	2	10	5	3	7	8	6	11	7	3	14

جدول ١٣ ـ ٨ الجدول $a \times b \times c$ المشكّل من البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ٧)

	a_1				a_2				a_3			
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	29	45	47	56	115	71	53	39	40	69	38	47
c_2	46	51	37	43	113	75	67	36	53	44	29	49
c_3	47	52	55	64	117	68	81	45	58	58	33	73

ولتوضيح العلاقات الحسابية المذكورة أعلاه نأخذ البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ٧) وقد تمّ تعديل سلّم القياس لسهولة الحسابات. والخطوة الأولى هي تشكيل الجدول الفرعي الذي يسمى بالجدول $a \times b \times c$ وذلك بالجمع فوق التكرارات . ثم تشكيل الجداول $a \times b$ ، $a \times c$ و $b \times c$ وهي معطاة على الترتيب في الجدول (١٣ ـ ٨) ، ثم (١٣ ـ ٩) ، (١٣ ـ ١٠) ، و(١٣ ـ ١١) . وتنبغي ملاحظة أنه يمكن تشكيل كل من الجداول الفرعية $a \times b$ ، $a \times c$ ،و $b \times c$ ، بالإستفادة من الجدول $a \times b \times c$ وذلك بالجمع فوق العامل الذي نريد الإستغناء عنه .

جدول ١٣ ـ ٩ الجدول الفرعي $a \times b$

	a_1	a_2	a_3
b_1	122	365	151
b_2	148	214	171
b_3	139	201	100
b_4	163	120	169

جدول ١٣ ـ ١٠ الجدول الفرعي a × c

	a_1	a_2	a_3
c_1	177	278	194
c_2	177	311	175
c_3	218	311	222

جدول ١٣ ـ ١١ الجدول الفرعي b × c

	b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	184	185	138	142
c_2	232	170	133	128
c_3	222	178	169	182

وبتطبيق المعادلات بين (16) و (29) نجد مجاميع المربعات التالية :

SS = 8277.14
SSR = 575.75
SS(abc) = 3283.27
SS(ab) = 2913.27
SS(ac) = 1065.32
SS(bc) = 670.83

SSA = 941.79
SSB = 463.79
SSC = 84.93
SS(AB) = 1507.69
SS(AC) = 38.60
SS(BC) = 122.11
SS(ABC) = 124.36
SSE = 4418.42

ويبين الجدول (١٣ ـ ١٢) تحليل التشتت . وبما أن أرقام البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ٧) افتراضية فلن نحاول إعطاء أية تفسيرات للتأثيرات المختلفة .

جدول ١٣ ـ ١٢ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ٧) .

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	5	575.75	115.15	$\sigma^2 + \frac{36}{5}\sum_{i=1}^{6} \rho_i^2$
المعالجات A	2	941.79	470.90	$\sigma^2 + 36\sum_{j=1}^{3} \alpha_j^2$
B	3	436.79	154.60	$\sigma^2 + 18\sum_{k=1}^{4} \beta_k^2$
C	2	84.93	42.46	$\sigma^2 + 36\sum_{\ell=1}^{3} \gamma_\ell^2$
AB	6	1507.69	251.28	$\sigma^2 + 3\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4} (\alpha\beta)_{jk}^2$
AC	4	38.60	9.65	$\sigma^2 + 6\sum_{j=1}^{3}\sum_{\ell=1}^{3} (\alpha\gamma)_{j\ell}^2$
BC	6	122.11	20.35	$\sigma^2 + 3\sum_{k=1}^{4}\sum_{\ell=1}^{3} (\beta\gamma)_{k\ell}^2$
ABC	12	124.36	10.36	$\sigma^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{4}\sum_{\ell=1}^{3} (\alpha\beta\gamma)_{jk\ell}^2$
الخطأ التجريبي	175	4418.42	252.48	σ^2
المجموع الكلي	215	8277.14		

١٣ ـ ٧ الطرق العامة للحسابات في تجربة عاملية بأربعة عوامل أو أكثر :

يمكن بسهولة تعميم الطرق الحسابية لتجربة عاملية بثلاثة عوامل إلى حالة تجربة عاملية بأربعة عوامل أو أكثر فنحسب أولاً مجموع المربعات الكلي ومجموع مربعات التكرارات . وبعدها نشكل على الترتيب الجدول $a \times b \times c \times d$ وهو الجدول الناتج عن البيان الإحصائي بعد الجمع فوق التكرارات ، ثم نشكل جميع الجداول ذات الثلاثة أبعاد وهي الجدول $a \times b \times c$ ، $a \times b \times d$ ، $a \times c \times d$ ، $b \times c \times d$ ، ثم الجداول ذات البعدين . وبدءاً من هذه الجداول ذات البعدين ، وبعد حساب مجاميع مربعات التأثيرات الرئيسية أي SSA ، SSB ، SSC . SSD نحسب بعملية طرح مجموع المربعات الموافق لكل من التفاعلات بين عاملين SS(AB) الخ . وبعدها ننتقل إلى الجداول ذات الثلاثة أبعاد ، فنحسب منها مجاميع المربعات لكل من التفاعلات بين ثلاثة عوامل . وأخيراً ، وباستخدام الجدوم ذي الأربعة أبعاد $a \times b \times c \times d$ ، نحسب مجموع المربعات الموافق للتفاعل بين العوامل الأربعة أي SS(ABCD) . أما مجموع مربعات الخطأ فنحسبه كالمعتاد بطرح مجموع مربعات التكرارات ومجموع مربعات المعالجات من مجموع المربعات الكلي ، أو بعبارة مكافئة نطرح مجموع مربعات التكرارات ومجموع المربعات الكلي للجدول $a \times b \times c \times d$ أي SS(abcd) من مجموع المربعات الكلي للتجربة .

والتعميم إلى حالة أكثر من أربعة عوامل واضح . فمن أجل N عامل بصورة عامة ، نحسب مجموع المربعات الكلي ومجموع مربعات التكرارات ثم نشكل الجداول ذات الـ N بُعداً ،ءكل الجداول الممكنة من ذات الـ (N−1) بُعداً ، كل الجداول الممكنة من ذات الـ (N−2) بُعداً ، وهكذا ... حتى نصل إلى كل الجداول الممكنة . ذات البعدين . وبعدها نحسب على التوالي مجاميع مربعات التأثيرات الرئيسية ، مجاميع مربعات كل من التفاعلات بين عاملين ، ... ، مجاميع مربعات كل من التفاعلات بين (N−1) من العوامل ، حتى نصل

إلى مجموع المربعات الموافق للتفاعل بين N عاملاً . ثم نحسب أخيراً مجموع مربعات الخطأ بالطرح . ولا توجد صعوبة في معرفة عدد درجات الحرية الموافق لكل من التفاعلات . إذ نصل إلى عدد درجات الحرية الموافق لتفاعل بين عدد من العوامل ، بضرب أعداد درجات الحرية الموافقة لكل من هذه العوامل ، أي درجات الحرية الموافقة للتأثيرات الرئيسية الداخلة في تركيب ذلك التفاعل .

وعندما يكون لدينا n من العوامل ، ولكل منها p من المستويات ، فإننا نشير إلى مثل هذه التجربة على أنها تجربة عاملية p^n . والحالتان المهمتان هما الحالتان الموافقتان لِـ $p = 2$ و $p = 3$. ويمكن للقارىء العودة إلى كتابنا المترجم (تصميم وتحليل التجارب) للوقوف على الطرق الحسابية لمثل هذه الحالات العامة .

١٣ ـ ٨ **نموذج مركبات التشتت (النموذج II) والنموذج المختلط** : نفرض في نموذج مركبات التشتت أن مستويات جميع العوامل هي متحولات عشوائية ؛ وفي النموذج المختلط تكون مستويات بعض العوامل مثبتة ، بينما المستويات الباقية متحولات عشوائية ، وفي الحقيقة ، فإننا نستخدم النموذج I على الدوام تقريباً ، فيما خلا بعض حقول البحث ، حيث يجد الباحث نفسه وهو يتعامل مع مستويات حصل عليها بصورة عشوائية . وفي مثل هذه الحالات فقط نضطر إلى أن ناخذ في إعتبارنا نموذج مركبات التشتت أو النموذج المختلط .

$$Y_{ijkl} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \gamma_l + (\alpha\gamma)_{jl} + (\beta\gamma)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{jkl} + \varepsilon_{ijkl} \qquad (30)$$

$$j = 1, \ldots, a \qquad i = 1, \ldots, r$$
$$l = 1, \ldots, c \qquad k = 1, \ldots, b$$

وهو يمثل تجربة عاملية بثلاثة عوامل منفذة وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائية . ويحتوي كل تكرار (أو زمرة) على abc من الوحدات التجريبية . ونفرض

أن مستويات العوامل الثلاثة كلها مستقلة عن بعضها ، وتتبع التوزيع الطبيعي ، كما نفترض أن التفاعلات بين المستويات المختلفة هي أيضاً مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي . وبعبارة أخرى نفترض أن جميع حدود النموذج في (30) بدءاً من α_i وحتى ε_{ijkl} مستقلة عن بعضها ، وتتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتتات هي ، على الترتيب

$$\sigma_\alpha^2 , \sigma_\beta^2 , \sigma_{\alpha\beta}^2 , \sigma_\gamma^2 , \sigma_{\alpha\gamma}^2 , \sigma_{\beta\gamma}^2 , \sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 , \sigma^2$$

ولا تختلف الإجراءات الحسابية مطلقاً عما وجدناه سابقاً . والفرق الوحيد في تحليل التشتت الناتج هو في العمود الموافق لتوقع متوسط المربعات ، ولهذا الخلاف ، بالطبع ، إنعكاسه على إختبار الفرضيات . ويبين الجدول (١٣ ـ ١٣) تحليل التشتت في هذه الحالة .

ونلاحظ أن توقع متوسط مربعات التفاعل ABC هي تقريباً نفس ما نجده في الجدول (١٣ ـ ٦) والفرق الوحيد هو أن $\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$ حلت محل :

$$\frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)} \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} \sum_{l=1}^{c} (\alpha\beta\gamma)_{jkl}^2 \qquad (31)$$

وعندما نتأمل أياً من التفاعلات بين عاملين ، AB مثلاً ، نجد أن التغير الذي طرأ على توقع متوسط المربعات أكثر تعقيداً . وبدلاً من $\frac{nc}{(a-1)(b-1)} \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} (\alpha\beta)_{jk}^2$ في الجدول (١٣ ـ ٦) ، نجد مركبتين للتشتت تحوي كل منهما الدليل $\alpha\beta$ وبصورة عامة يلاحظ القارىء أن المركبات الموجودة في توقع متوسط المربعات هي تلك التي يحوي دليلها جميع الأحرف التي تحدد التأثير أو التفاعل المعنيّ . وإذا نظرنا ، مثلاً ، إلى التأثير C نرى أن مركبات التشتت التي يحوي دليلها الحرف γ كلها موجودة . وليس صعباً الحصول على أمثال مركبات التشتت المختلفة فهي ، بكل بساطة ، جداء الأعداد الصحيحة ، التي تحدد على التوالي عدد

جدول ١٣ ـ ١٣ تحليل التشتت لتجربة عامليّ بثلاثة عوامل في تصميم الزمرة التامة العشوائية ، النموذج II .

مصدر التغير		درجات الحرية	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	A	r–1	SSR/(r–1)	$\sigma^2 + abc\sum_{i=1}^{r} \rho_i^2/(r-1)$
المعالجات	A	a–1	SSA/(a–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma} + rbc\sigma^2_{\alpha}$
	B	b–1	SSB/(b–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta} + ra\sigma^2_{\beta\gamma} + rac\sigma^2_{\beta}$
	C	c–1	SSC/(c–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma} + ra\sigma^2_{\beta\gamma} + rab\sigma^2_{\gamma}$
	AB	(a–1) (b–1)	SS(AB)/(a–1) (b–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta}$
	AC	(a–1) (c–1)	SS(AC)/(a–1) (c–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma}$
	BC	(b–1) (c–1)	SS(BC)/(b–1) (c–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + ra\sigma^2_{\beta\gamma}$
	ABC	(a–1) (b–1) (c–1)	SS(ABC)/(a–1) (b–1) (c–1)	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
الخطأ التجريبي		(r–1) (abc–1)	SSE/(r–1) (abc–1)	
المجموع		rabc–1		σ^2

التكرارات وعدد مستويات كل العوامل غير الممثلة في دليل المركبة المعنية . فمثلاً ، لتحديد أمثال $\sigma^2_{\beta\gamma}$ نلاحظ أن α غير موجودة في دليل هذه المركبة ، وأن عدد مستويات العامل الموافق لِـ α هو a ، وبالتالي فإن أمثال هذه المركبة هي ra ، وكمثال آخر لنأخذ أمثال σ^2_{α} ففي دليل هذه المركبة لا يوجد β ولا γ ، وعدد مستويات العاملين الموافقين لِـ β و γ على الترتيب هما b و c ، وهكذا تكون أمثال σ^2_{α} هي r bc .

كيف نختبر الآن الفرضيات المختلفة التي يمكن صياغتها ؟ وسنجيب على هذا التساؤل بإختصار شديد بإعتبار أنه لا جديد فيها ، ولدى تأمل عمود توقع متوسط المربعات في الجدول (١٣ ـ ١٣) يتضح لنا أنه يمكن إختبار فرضيات مثل : $H_1 : \sigma^2_{\alpha\beta\gamma} = 0$ ، $H_2 : \sigma^2_{\beta\gamma} = 0$ ، $H_3 : \sigma^2_{\alpha\gamma} = 0$ ، $H_4 : \sigma^2_{\alpha\beta} = 0$ بتشكيل النسب :

$$F = \frac{SS(ABC)/(a-1)\, b-1)\,(c-1)}{SSE/(r-1)\,(abc-1)}\,, \tag{32}$$

$$F = \frac{SS(BC)/(b-1)\,(c-1)}{SS(ABC)/(a-1)\,(b-1)\,(c-1)}\,, \tag{33}$$

$$F = \frac{SS(AC)/(a-1)\,(c-1)}{SS(ABC)/(a-1)\,(b-1)\,(c-1)}\,, \tag{34}$$

و

$$F = \frac{SS(AB)/(a-1)\,(b-1)}{SS(ABC)/(a-1)\,(b-1)\,(c-1)}\,, \tag{35}$$

على الترتيب .

ولكن لا يتوفر لنا أي إختبار دقيق لأي من الفرضيات $H_6 : \sigma^2_{\beta} = 0$ ، $H_5 : \sigma^2_{\gamma} = 0$ أو $H_7 : \sigma^2_{\alpha} = 0$. ويمكن أن نلجأ إلى إختبارات تقريبية . فلإختبار $H_7 : \sigma^2_{\alpha} = 0$ ، مثلاً ، يمكن حساب النسبة F التقريبية التالية :

$$F = \frac{MSA}{MS(AB) + MS(AC) - MS(ABC)}$$

$$= \frac{\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma} + rbc\sigma^2_{\alpha}}{(\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta}) + (\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma}) - (\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma})}$$

بدرجات من الحرية $\nu_1 = a - 1$ و $\nu_2 = \hat{\nu}$ حيث ترمز MSA إلى متوسط مربعات A الخ . وحيث

$$\hat{\nu} = \frac{(MS(AB) + MS(AC) - MS(ABC))^2}{\frac{(MSAB)^2}{(a-1)(b-1)} + \frac{(MS(AC))^2}{(a-1)c-1)} + \frac{(-MS(ABC))^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}} \qquad (37)$$

ويمكن اختبار الفرضيتين H_5 و H_6 بطرق مشابهة .

النموذج المختلط : ولا يضاح حالة النموذج المختلط سنعتبر تجربة عاملية بعاملين ، منفذة في إطار تصميم الزمرة التامة العشوائية ، وحيث تحوي كل زمرة ab من الوحدات التجريبية . ونمثل هذه التجربة بالنموذج :

$$y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, r \\ j = 1, \ldots, a \\ k = 1, \ldots, b \end{array}$$

حيث :

$$\sum_{i=1}^{r} \rho_i = \sum_{j=1}^{a} \alpha_j = \sum_{j=1}^{a} (\alpha\beta)_{jk} = 0$$

والمقادير β_k مستقلة فيما بينها ، وتتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ^2_β ، وكذلك المقادير ε_{ijk} مستقلة فيما بينها ، وتتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ^2. ونلاحظ أننا

لم نفرض $\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk}=0$ ، ذلك لأننا نفرض أن مستويات العامل a مثبتة ، بينما مستويات العامل b عشوائية . ونقدم في الجدول (١٣ ـ ١٤) تحليل التشتت الموافق لهذه الحالة . ولإختبار الفرضية بعدم وجود تفاعل بين العاملين ، أي الفرضية $H_1:\sigma^2_{\alpha\beta}=0$ ، نحسب النسبة :

$$F = \frac{SS(AB)/(a-1)(b-1)}{SSE/(r-1)(ab-1)} \qquad (39)$$

$$= \frac{\text{متوسط مربعات التفاعل}}{\text{متوسط مربعات الخطأ}}$$

وهي مطابقة للنسبة المقابلة في حالتي النموذج I والنموذج II .

أما الفرضيتان $H_2:\alpha_j=0$ ، $(j=1,\ldots,a)$ و $H_3:\sigma_\beta^2=0$ فأولهما تتعلق بمجتمع منته من المستويات (a من المستويات) بينما تتعلق الثانية بمجتمع لا نهائي من المستويات (وهي مستويات العامل b) . ففي الفرضية H_2 نهتم بإختبار عدم وجود فروق فعلية بين تأثيرات مستويات معينة للعامل a هي المستويات الداخلة في التجربة . ومن الواضح أن الفروق الملحوظة بين تأثيرات المستويات المختلفة للعامل a ستتأثر بدورها بالمستويات العشوائية للعامل b . وهذا يعني أنه لا بد لأي إختبار يتعلق بمستويات a من أن يأخذ بعين الإعتبار التفاعل a × b . وكما هو متوقع ، نختبر إذن الفرضية H_2 بحساب النسبة :

$$F = \frac{SSA/(a-1)}{SS(AB)/(a-1)(b-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات التأثير A}}{\text{متوسط مربعات التفاعل}} \qquad (40)$$

وكما نلاحظ من توقع متوسط المربعات في الجدول (١٣ ـ ١٤) فإنه يمكن اختبار الفرضية $H_3:\sigma_\beta^2=0$ بإستخدام النسبة :

جدول ١٣ ـ ١٤ تحليل التشتت من أجل تجربة عاملية بعاملين وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائية . النموذج المختلط

مصدر التغير	درجات الحرية	متوسط المربعات	توقع متوسط المربعات
التكرارات	r–1	SSR/(r–1)	$\sigma^2 + \frac{ab}{r-1}\sum_{i=1}^{r} \rho_i^2$
المعالجات A	a–1	SSA/(a–1)	$\sigma^2 + r\sigma_{\alpha\beta}^2 + \frac{rb}{a-1}\sum_{j=1}^{a} \alpha_j^2$
B	b–1	SSB/(b–1)	$\sigma^2 + ra\,\sigma_\beta^2$
AB	(a–1) (b–1)	SS(AB)/(a–1) (b–1)	$\sigma^2 + r\,\sigma_{\alpha\beta}^2$
الخطأ التجريبي	(r–1) (ab–1)	SSE/(r–1) (ab–1)	σ^2
المجموع	rab–1		

$$F = \frac{SSB/(b-1)}{SSE/(r-1)(ab-1)} = \frac{\text{متوسط مربعات التأثير B}}{\text{متوسط مربعات الخطأ التجريبي}} \qquad (41)$$

ونلاحظ أن توقع متوسط المربعات الموافق للعامل الذي تكون مستوياته مثبتة يحوي مركبة تفاعل ، بينما لا يحوي توقع متوسط المربعات الموافق للعامل الذي تكون مستوياته عينة عشوائية من مجتمع من المستويات أي مركبة تفاعل .

ونختتم مناقشتنا للنموذج المختلط بدراسة تجربة عاملية بثلاثة عوامل (والتعميم ممكن بسهولة إلى حالة أربعة عوامل أو أكثر) ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية ، حيث تحوي كل زمرة abc من الوحدات التجريبية ، والنموذج الذي يمثل تجربة كهذه هو :

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \gamma_l + (\alpha\gamma)_{jl} + (\beta\gamma)_{kl} + (\alpha\beta\gamma)_{jkl} + \varepsilon_{ijkl} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, r \\ j = 1, \ldots, a \\ k = 1, \ldots, b \\ l = 1, \ldots, c \end{array} \qquad (42)$$

حيث ρ_i أعداد ثابتة تحقق الشرط

$$\sum_{i=1}^{r} \rho_i = 0$$

والمتحولات ε_{ijkl} هي متحولات عشوائية مستقلة تتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ^2. وفيما يتعلق بالحدود الباقية في المعادلة (42) فإن تعريفها يتوقف على ما إذا كانت مستويات العوامل الموافقة مثبتة أو عشوائية . وسندرس حالتين : (i) مستويات كل من a و b مثبتة ومستويات c عشوائية ، و (ii) مستويات a مثبتة ومستويات كل من b و c عشوائية .

لنفرض أن مستويات كل من a و b مثبتة ومستويات c عشوائية . فكل إختبار يتعلق بمستويات a ، مستويات b ، أو أي تفاعل يحوي كلاً من a و b ، يجب أن يأخذ بعين الإعتبار حقيقة أننا استخدمنا في التجربة عينة عشوائية فقط من المستويات الممكنة لِـ c . ونجد في هذه الحالة تحليل التشتت المبين في الجدول (١٣ ـ ٥) ، وإختبار الفرضيات واضح من توقع متوسط المربعات .

أما في الحالة (ii) حيث مستويات a فقط مثبتة ، ومستويات كل من b و c عشوائية ، فإننا نجد تحليل التشتت المبين في الجدول (١٣ ـ ١٦) .

جدول ١٣ ـ ١٥ تحليل تشتت مبسط لتجربة عاملية بثلاثة عوامل ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية :

النموذج المختلط حيث مستويات العاملين a و b مثبتة ومستويات العامل c عشوائية .

مصدر التغير	توقع متوسط المربعات
التكرارات	$\sigma^2 + \frac{abc}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$
المعالجات :	
A	$\sigma^2 + rb\sigma_{\alpha\gamma}^2 + \frac{rbc}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$
B	$\sigma^2 + ra\sigma_{\beta\gamma}^2 + \frac{rac}{b-1}\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2$

C	$\sigma^2 + ra\,\sigma_{\gamma}^2$
AB	$\sigma^2 + r\,\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + \frac{rc}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk}^2$
AC	$\sigma^2 + rb\,\sigma_{\alpha\gamma}^2$
BC	$\sigma^2 + ra\,\sigma_{\beta\gamma}^2$
ABC	$\sigma^2 + r\,\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
الخطأ التجريبي	σ^2

جدول ١٣ ـ ١٦ تحليل تشتت مبسط لتجربة عاملية بثلاثة عوامل ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية .

النموذج المختلط حيث مستويات العامل a مثبتة ومستويات العاملين b و c عشوائية .

مصدر التغير	توقع متوسط المربعات
المتكرارات	$\sigma^2 + \frac{abc}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$
المعالجات :	

A	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta} + \frac{rbc}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$
B	$\sigma^2 + ra\sigma^2_{\beta\gamma} + rab\sigma^2_{\gamma}$
AB	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rc\sigma^2_{\alpha\beta}$
AC	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma} + rb\sigma^2_{\alpha\gamma}$
BC	$\sigma^2 + ra\sigma^2_{\beta\gamma}$
ABC	$\sigma^2 + r\sigma^2_{\alpha\beta\gamma}$
الخطأ التجريبي	σ^2

١٣ ــ ٩ التجارب العاملية في حالة أكثر من ملاحظة واحدة من كل وحدة تجريبية : في حال إستخدام تصميم الزمرة التامة العشوائية نجد نفس النوع من تحليل التشتت الذي استعرضناه في الفقرة (١٢ ــ ٧) ، ويقع الفرق الوحيد في تقسيم مجموع مربعات المعالجات . وهكذا فإننا سوف لا نعط مثالاً عددياً وإنما سنكتفي بجدول عام لتحليل التشتت . ونبدأ في هذه الحالة من النموذج التالي الموافق لحالة عاملين :

$$Y_{ijkl} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} + \eta_{ijkl} \quad (43)$$

$i = 1, \ldots, r \;,\; j = 1, \ldots, a$

$k = 1, \ldots, b \;,\; l = 1, \ldots, n,$

حيث :

$$\sum_{i=1}^{r}\rho_i = \sum_{j=1}^{a}\alpha_j = \sum_{k=1}^{b}\beta_k = \sum_{j=1}^{a}(\alpha\beta)_{jk} = \sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk} = 0 \quad (44)$$

والمتحولات ε_{ijk} مستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت يساوي σ^2 أما المتحولات η_{ijkl} فمستقلة وتتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي σ_η^2 . وتحليل التشتت معطى في الجدول (١٣ ـ ١٧) .

جدول ١٣ ـ ١٧ تحليل التشتت العام لتجربة عاملية بعاملين ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية وبِـ n ملاحظة من كل وحدة تجريبية .

مصدر التغير	درجات الحرية	توقع متوسط المربعات
التكرارات	r–1	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2 + \frac{nab}{r-1}\sum_{i=1}^{r}\rho_i^2$
المعالجات : A	a–1	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2 + \frac{rnb}{a-1}\sum_{j=1}^{a}\alpha_j^2$
B	b–1	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2 + \frac{rna}{b-1}\sum_{k=1}^{b}\beta_k^2$
AB	(a–1) (b–1)	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2 + \frac{rn}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}(\alpha\beta)_{jk}^2$
الخطأ التجريبي	(r–1) (ab–1)	$\sigma_\eta^2 + n\sigma^2$
خطأ العينة	rab (n–1)	σ_η^2
المجموع	rabn–1	

ويمكن تعميم الفكرة بحيث تضم مراحل جديدة ، إذ لو فرضنا مثلاً أن الملاحظات المتعددة من كل وحدة تجريبية هي إنتاج عينة عشوائية من وحدات أصغر اكتفينا بها بدلاً من حساب إنتاج الوحدة التجريبية بكاملها ،

وأننا قررنا أخذ عدة قياسات من كل من الوحدات الصغيرة هذه بدلاً من قياس واحد . ففي هذه الحالة يصبح النموذج (43) على الشكل :

$$Y_{ijklm} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} + \eta_{ijkl} + \delta_{ijklm} \quad (45)$$

$$i = 1, \ldots, r \ , \ j = 1, \ldots, a$$

$$k = 1, \ldots, b \ ; \ l = 1, \ldots, n$$

$$m = 1, \ldots, d$$

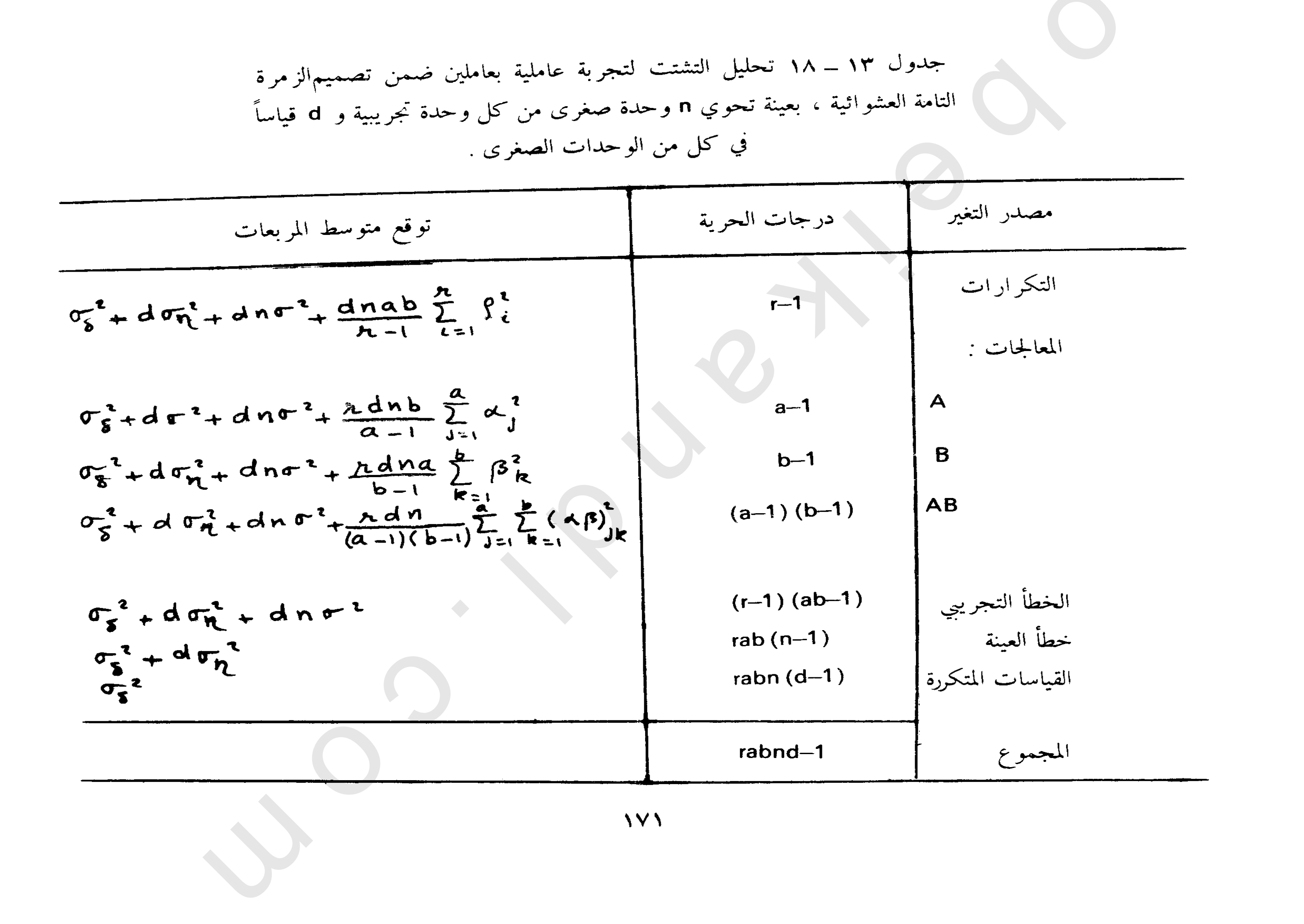
حيث نعرف جميع الحدود كما في المعادلة (43) ، والمتحولات δ_{ijklm} هي متحولات عشوائية مستقلة تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر وتشتت σ_δ^2 . ويصبح تحليل التشتت كما يبين الجدول (١٣ ـ ١٨) . ويمكن تصميم هذه النتائج بحيث تشمل 3 عوامل أو أكثر .

١٣ ـ ١٠ **تحليل منحنيات الإستجابة في التجارب العاملية** : غالباً ما يكون من المستحسن دراسة منحني الإستجابة الذي يلخص تأثيرات المستويات المختلفة لعامل على الخاصة المدروسة . وفي حالة التجارب العاملية يمكن دراسة منحنيات الإستجابة الموافقة لمستويات عاملين أو أكثر من عوامل التجربة . وإذا تضمنت التجربة عاملين a و b ، على سبيل المثال ، فيمكننا تقسيم مجموعي المربعات SSA و SSB إلى أجزاء نرمز لها بِـ A_L ، A_Q ، ... ، B_L ، B_Q ، ... ، على الترتيب . أي يمكننا الحصول على مجموع مربعات المركبات الخطية والتربيعية الخ . الموافقة لكل من العاملين a و b . ومن الممكن أيضاً تقسيم مجموع مربعات التفاعل SS(AB) إلى مركبات نرمز لها بِـ A_LB_L ، A_LB_Q ، A_QB_L ، A_QB_Q ، ... وفي حال وجود عامل ثالث C نضيف أيضاً المركبات C_L ،

C_Q ، $A_L C_L$ ، $A_Q C_L$ ، $B_L C_Q$ ، $A_L B_L C_L$ ، $A_L B_L C_Q$ ، الخ . وبالطبع فإن عدد المركبات هذه يتوقف على عدد مستويات العوامل المختلفة في التجربة ، وسنقدم الآن مثالين عدديين يوضحان طرق حساب هذه المركبات .

لناخذ أولاً تجربة بعاملين أحدهما a بأربعة مستويات هي a_1, a_2, a_3, a_4 والآخر b بثلاثة مستويات هي b_1, b_2, b_3 . ولنفرض أنها نُفذت وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائية الذي يحوي زمرتين. والبيان الإحصائي معطى في الجدول (١٣ ــ ١٩) وهو بيان إفتراضي. ولإيضاح الطرق الحسابية سنحاول الحصول على 11 من مجاميع المربعات (يوافق كل منها درجة واحدة من الحرية) هي : A_L ، A_Q ، A_C ، B_L ، B_Q ، $A_L B_L$ ، $A_L B_Q$ ، $A_Q B_L$ ، $A_Q B_Q$ ، $A_C B_L$ ، و $A_C B_Q$. وعملياً نحسب بعض هذه المركبات فقط ، ويتوقف

جدول ١٣ ـ ١٨ تحليل التشتت لتجربة عاملية بعاملين ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية ، بعينة تحوي n وحدة صغرى من كل وحدة تجريبية و d قياساً في كل من الوحدات الصغرى .



مصدر التغير	درجات الحرية	توقع متوسط المربعات
التكرارات	r–1	$\sigma_\delta^2 + d\sigma_\eta^2 + dn\sigma^2 + \frac{dnab}{r-1}\sum_{i=1}^{r} \rho_i^2$
المعالجات :		
A	a–1	$\sigma_\delta^2 + d\sigma^2 + dn\sigma^2 + \frac{rdnb}{a-1}\sum_{j=1}^{a} \alpha_j^2$
B	b–1	$\sigma_\delta^2 + d\sigma_\eta^2 + dn\sigma^2 + \frac{rdna}{b-1}\sum_{k=1}^{b} \beta_k^2$
AB	(a–1) (b–1)	$\sigma_\delta^2 + d\sigma_\eta^2 + dn\sigma^2 + \frac{rdn}{(a-1)(b-1)}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} (\alpha\beta)_{jk}^2$
الخطأ التجريبي	(r–1) (ab–1)	$\sigma_\delta^2 + d\sigma_\eta^2 + dn\sigma^2$
خطأ العينة	rab (n–1)	$\sigma_\delta^2 + d\sigma_\eta^2$
القياسات المتكررة	rabn (d–1)	σ_δ^2
المجموع	rabnd–1	

عدد ونوع المركبات المطلوب حسابها على ظروف المسألة المدروسة . ونفترض ضمناً أن مستويات كل من العوامل تختلف عن بعضها بمقادير متساوية .

جدول ١٣ ـ ١٩ بيان توضيحي لحساب المركبات الخطية ، التربيعية ، ... للتأثيرات في تجربة عاملية بعاملين . موضوعة في إطار تصميم الزمرة التامة العشوائية .

التكرارات		a_1	a_2	a_3	a_4
1	b_1	7	8	9	7
	b_2	5	6	11	10
	b_3	4	6	10	12
2	b_1	7	9	9	8
	b_2	6	6	10	11
	b_3	6	7	10	12

والجدول $a \times b$ الضروري لحساب مجاميع المربعات المعتادة في جدول تحليل التشتت معطى في الجدول (١٣ ـ ٢٠) . وكل رقم في هذا الجدول هو مجموع ملاحظتين (r = عدد التكرارات = 2) . وبإستخدام أمثال كثيرات الحدود من الجدول (١٢ ـ ١٤) أو من الجدول الموافق في الملحق نجد أن :

جدول ١٣ ـ ٢٠ الجدول المشكل من البيان الإحصائي في الجدول (١٣ ـ ١٩)

	a_1	a_2	a_3	a_4	المجموع
b_1	14	17	18	15	64
b_2	11	12	21	21	65
b_3	10	13	20	24	67
المجموع	35	42	59	60	196

$$A_L = \frac{[(-3)(35) + (-1)(42) + (1)(59) + (3)(60)]^2}{(2)(3)[(-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2]} = 70.35$$

$$A_Q = \frac{[(1)(35) + (-1)(42) + (-1)(59) + (1)(60)]^2}{(2)(3)[(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2]} = 1.50$$

$$A_C = \frac{[(-1)(35) + (3)(42) + (-3)(59) + (1)(60)]^2}{(2)(3)[(-1)^2 + (3)^2 + (-3)^2 + (1)^2]} = 5.63$$

$$B_L = \frac{[(-1)(64) + (0)(65) + (1)(67)]^2}{(2)(4)[(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2]} = .56$$

$$B_Q = \frac{[(1)(64) + (-2)(65) + (1)(67)]^2}{(2)(4)[(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2]} = .02$$

ونلاحظ أن المخرج هو (i) في كل من A_L ، A_Q ، A_C يساوي (rb) × (مجموع مربعات أمثال كثيرة الحدود) و (ii) في كل من B_L ، B_Q يساوي (ra) × (مجموع مربعات أمثال كثيرة الحدود) .

ولإيضاح طريقة حساب مركبات مجموع مربعات التفاعل SS(AB) ، نأخذ كمثال المركبة A_QB_L . نحسب أولاً مجموع جداءات أمثال كثيرة الحدود الموافقة لِـ a بالمجاميع الموجودة في خلايا الجدول a × b ، وذلك من أجل كل مستوى من مستويات العامل b فنحصل بذلك على ثلاثة مجاميع موافقة لِـ b_1 ، b_2 ، b_3 على الترتيب . وبعدها نطبق أمثال كثيرة الحدود الموافقة لِ b على هذه المجاميع الثلاثة ، فنحصل على مجموع أخير نربعه ونقسمه على جداء مجموع مربعات أمثال كثيرة الحدود الموافقة لِـ a في مجموع مربعات أمثال كثيرة الحدود الموافقة لِـ b ، وهي الأمثال التي استخدمناها لتوّنا في الحسابات (في مثالنا هنا نجد أن الأمثال الموافقة لِـ a تربيعية والأمثال الموافقة لِـ b خطية) هذا بالإضافة إلى تقسيمها على r (عدد التكرارات) بإعتبار أن كل مجموع في خلية من خلايا الجدول a × b هو مجموع r من الملاحظات . والقيمة

الناتجة هي عندئذ مجموع المربعات الموافق للمركبة $A_Q B_L$ من مركبات SS(AB) . وفي مثالنا العددي نجد :

من أجل b_1 : $(1)(14) + (-1)(17) + (-1)(18) + (1)(15) = -6$

من أجل b_2 : $(1)(11) + (-1)(12) + (-1)(21) + (1)(21) = -1$

من أجل b_3 : $(1)(10) + (-1)(13) + (-1)(20) + (1)(24) = 1$

ومنه :

$$A_Q B_L = \frac{[(-1)(-6) + (0)(-1) + (1)(1)]^2}{2[(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (1)^2][(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2]} = 3.06$$

ويمكن بطريقة مماثلة تماماً حساب بقية المركبات المبينة في الجدول (١٣ ـ ٢١) .

جدول ١٣ ـ ٢١ تحليل التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول ١٣ـ١٩

مصدر التغير	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات
التكرارات	1	1.50	1.50
المعالجات :			
A_L	1	70.53	70.53
A_Q	1	1.50	1.50
A_C	1	5.63	5.63
B_L	1	.56	.56
B_Q	1	.02	.02
$A_L B_L$	1	25.31	25.31
$A_L B_Q$	1	2.60	2.60
$A_Q B_L$	1	3.06	3.06
$A_Q B_Q$	1	.20	.20
$A_C B_L$	1	.32	.32
$A_C B_Q$	1	2.60	2.60
الخطأ التجريبي	11	3.50	.32
المجموع	23	117.33	

وسوف لا نقوم بمثل هذه التفصيلات في المثال الثاني المعطى في الجدول (١٣ ـ ٢٢) بل سنحسب فقط المركبات A_L ، $A_Q B_L$ ، و $A_Q B_C C_L$. وسيجد القارىء أنه من الضروري تشكيل الجدولين $a \times b$ و $a \times b \times c$ من أجل هذه الحسابات .

$$A_L = \frac{[(-1)(747) + (0)(1404) + (1)(925)]^2}{(2)(4)(6)[(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2]} = 330.04$$

$$A_Q B_L = \frac{[(1)(325) + (-2)(432) + (1)(-659)]^2}{(2)(6)[(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2][(-3)^2 + (1)^2 + (3)^2]} = 996.67$$

$$A_Q B_C C_L = \frac{(-4232)^2}{D} = 1066.06$$

حيث

$$D = 2[(1)^2 + (-2)^2 + (1)^2][(-1)^2 + (3)^2 + (-3)^2 + (1)^2]$$
$$[(-5)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (3)^2 + (5)^2]$$

والمخارج هي (i) من أجل A_L تساوي : $(rbc) \times$ (مجموع مربعات الأمثال) ، (ii) من أجل $A_Q B_L$ تساوي : $(rc) \times$ (جداء مجموعي مربعات الأمثال) ، (iii) من أجل $A_Q B_C C_L$ تساوي : (r) (جداء مجاميع مربعات الأمثال) . أما الصور من أجل A_L و $A_Q B_L$ فقد حسبناها بطريقة مماثلة تماماً لما وجدناه في المقادير المشابهة في المثال السابق . وبتعميم المبدأ المتبع في حساب المركبة $A_Q B_L$ نحسب $A_Q B_C C_L$. ويمكن توضيح هذا التعميم كما يلي : نطبق الأمثال الموافقة لِـ C_L على الأعداد الموافقة للعامل c في الجدول $a \times b \times c$ ، وذلك من أجل كل مستوى من مستويات b ضمن كل مستوى من مستويات a . ونحصل بذلك على أربع مجاميع جداءات ، واحدة من أجل كل من مستويات b ، وذلك ضمن كل مستوى من مستويات a . وبعدها نستخدم الأمثال الموافقة لِـ B_C ، ونطبقها على المجاميع التي حصلنا عليها في الخطوة السابقة ، ويعطينا هذا نوعاً من « المجموع $B_C C_L$ » من أجل

كل مستوى من مستويات a. وأخيراً نستخدم الأمثال الموافقة لِـ A_Q مطبقة على هذه المجاميع لنحصل على الصورة في عبارة $A_Q B_C C_L$،.

جدول ١٣ ـ ٢٢ بيان إحصائي افتراضي لتوضيح حسابات مجاميع مربعات معينة في تجربة عاملية بثلاثة عوامل منفذة في إطار تصميم الزمرة التامة العشوائية.

التكرارات		a_1				a_2				a_3			
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4	b_1	b_2	b_3	b_4
1	C_1	7	7	9	7	15	36	60	15	24	29	17	19
	C_2	23	18	25	15	13	35	61	18	30	26	11	8
	C_3	9	18	24	23	12	43	62	14	31	24	15	23
	C_4	7	13	25	36	11	12	63	26	32	15	12	5
	C_5	6	8	20	7	15	46	18	28	15	32	13	6
	C_6	10	12	30	11	10	42	27	12	17	29	8	7
2	C_1	7	6	11	7	15	35	60	20	25	30	20	20
	C_2	20	19	25	16	13	30	64	20	30	25	15	10
	C_3	9	22	26	24	13	40	66	15	32	25	15	22
	C_4	8	15	26	30	13	10	66	25	34	15	15	4
	C_5	8	10	20	8	17	40	20	30	18	35	15	5
	C_6	9	12	28	11	8	45	30	15	19	30	10	8

تمارين

١ ـ حلّل وفسر البيان الإحصائي التالي المتعلق بإنتاج البطاطا الحلوة عند تطبيق تراكيب مختلفة من السماد ($n = N$ ، $p = P_2O_5$ ، $k = K_2O$) ؛ وحيث يشير الرقم 312 ، مثلاً إلى أن العامل الأول n في مستواه الثالث ، والعامل الثاني p في مستواه الأول ، والعامل الثالث k في مستواه الثاني :

التكرار الأول						التكرار الثاني					
npk	الانتاج	npk	الانتاج	npk	الانتاج	npk	الانتاج	npk	الانتاج	npk	الانتاج
133	45	211	39	333	70	212	83	211	56	133	65
111	34	313	62	311	40	221	52	321	49	112	48
221	42	222	65	212	45	322	65	333	92	311	56
323	69	233	92	132	53	313	101	122	75	332	79
213	58	123	56	121	54	111	50	312	86	213	95
331	51	332	91	223	69	331	61	232	74	222	81
232	72	131	73	322	85	132	89	223	109	231	84
122	56	112	55	113	60	123	90	113	68	323	103
312	82	321	75	231	78	233	122	131	98	121	64
المجموع	509		608		554		713		707		675
المجموع الكلي					1671						2095

٢ ـ يرش مزارع أوراق التفاح بتركيزات مختلفة من مركبات النيتروجين ، ثم يحدد كمية النيتروجين (بالملغ في الديسميتر المربع) الباقية على الأوراق مباشرة بعد الرش ولنرمز لهذا الزمن بـ t_0 ثم بعد زمنين متتاليين t_1 و t_2 والهدف من التجربة هو معرفة معدل امتصاص الورق للنيتروجين ، ويوجد تكراران لكل معالجة ، والرقم الأول في كل خلية من خلايا الجدول ترمز لنتيجة التكرار الأول .

الزمن	مستويات النيتروجين		
	n_1	n_2	n_3
t_0	2.29	6.50	8.75
	2.24	5.94	9.52
t_1	0.46	3.03	2.49
	0.19	1.00	2.04
	0	0.75	1.40
t_2	0.26	1.16	1.81

والمطلوب تحليل التشتت مع تقسيم مجموع مربعات المعالجات إلى المركبات :

$$N_L,\ N_Q,\ T_L,\ T_Q,\ N_L T_Q,\ N_L T_L,\ N_Q T_L,\ N_Q T_Q$$

٣ ـ اختبرنا خمس سلالات من نوع معين من الحبوب وأربعة أسمدة. واخترنا بصورة عشوائية 3 وحدات جزئية مربعة من كل وحدة تجريبية وسجلنا إنتاجها كما يلي :

الأسمدة	أنواع الحبوب				
	1	2	3	4	5
1	57 46 28	26 38 20	39 39 43	23 36 18	48 35 48
2	67 72 66	44 68 64	57 61 61	74 47 69	61 60 75
3	95 90 89	92 89 99	91 82 98	98 85 85	78 89 95
4	92 88 99	96 95 99	98 93 98	90 90 98	99 98 99

أ ـ أكتب جدول تحليل التشتت.

ب ـ بالإستناد إلى نموذج مناسب أكتب توقع متوسط المربعات بما يتفق مع الشروط التالية : (i) السلالات الخمس والأسمدة الأربعة هي عينات عشوائية ؛ (ii) السلالات والأسمدة مجموعات مقصودة لذاتها ؛ (iii) السلالات عينة عشوائية والأسمدة مجموعة معطاة.

جـ ـ إختبر الفرضية بأن متوسطات السلالات متساوية . وفرضية تساوي متوسطات الأسمدة .

د ـ أكتب جدولاً يحوي المتوسطات وانحرافاتها المعيارية .

هـ ـ ماذا تستخلص من نتائج هذه التجربة .

٤ ـ يبين الجدول التالي مخطط تجربة عاملية 2^3 مع النتائج .

التكرار 1		التكرار 2		التكرار 3		التكرار 4	
(1) 7	b 24	ab 36	bc 31	a 28	ac 31	abc 66	(1) 11
abc 39	ac 31	(1) 19	ac 36	c 24	b 19	a 31	bc 29
a 30	c 21	abc 41	b 30	ab 35	(1) 13	c 21	ac 33
bc 27	ab 39	c 30	a 33	ac 26	abc 36	b 25	ab 43

ومجموع المربعات الكلي 3605.97 . والمطلوب إتمام تحليل التشتت ، حساب مجموع مربعات المعالجات من أجل كل من تأثيرات المعالجات بمفردها .

٥ ـ حلّل وفسّر البيان الإحصائي التالي حيث المحصول هو الشوفان ؛ والإنتاج مقاس بالبوشل في الفدان .

المعالجة	التكرار 1	التكرار 2	التكرار 3	مجموع المعالجة
$n_1 p_1 k_1$	32.2	33.9	34.6	100.7
$n_2 p_1 k_1$	37.4	40.9	38.9	117.2
$n_1 p_2 k_1$	30.6	39.4	33.8	103.8
$n_2 p_2 k_1$	52.4	48.0	43.9	144.3
$n_1 p_1 k_2$	29.9	34.5	36.5	100.9
$n_2 p_1 k_2$	42.3	29.9	34.1	106.2
$n_1 p_2 k_2$	31.8	32.5	34.2	98.5
$n_2 p_2 k_2$	46.6	49.5	46.7	142.8
المجموع	303.1	308.6	302.7	914.4

الفصل الرابع عشر

تحليل تمام التشتت

١٤ ـ ١ مقدمة : خصصنا الفصول الخمسة السابقة للتطبيقات الأساسية لطريقتي تحليل التشتت وتحليل التراجع ، وتشكل هاتان الطريقتان المستخدمتان على نطاق واسع أهم ما في جعبة الإحصائي مما يمكن وضعه في مجالات التطبيق .

وقد لاحظنا في مسائل التصنيف الثنائي التي عالجناها في الفصل الحادي عشر أننا قمنا بإختبار تأثير متحول أول بمعزل عن تأثير متحول ثان ، وذلك بإستخدام تحليل التشتت . وكان المتحول الثاني يمثل ، بصورة عامة ، أنواعاً أو أصنافاً ، أما إذا كان يمثل قياسات فعلية ، فستمكن ، في مثل هذه الحالة أيضاً ، من إختبار تأثيرات المتحول الأول بمعزل عن تأثيرات المتحول الثاني ، ولكننا سنستخدم الآن طريقة تحليل تمام التشتت . ويدعى المتحول الثاني ، بصورة عامة ، المتحول « المرافق » .

وعلى سبيل المثال ، إذا رغبنا في مقارنة تأثيرات نظم مختلفة للتغذية على وزن الخنازير ، فيمكن إعتبار الوزن الإبتدائي للخنزير كمتحول مرافق . وعندما نقول ، مثلاً ، أن نظام التغذية A هو الأفضل فيجب أن نكون قادرين على القول بأن الوزن الذي كسبته المجموعة التي خضعت للنظام A لم يكن نتيجة لوزنها الإبتدائي . وحتى لو كانت الأوزان الإبتدائية متقاربة ، فإنه يستحيل على الغالب ، التأكيد بأن للعناصر التجريبية المختلفة نفس القدرة على تمثُّل الراتب الغذائي الذي تتناوله ، وهكذا يمكن قياس مقدار التمثّل هذا وأخذه بعين الإعتبار عند مقارنة نظم التغذية المختلفة .

وفي تجربة مصممة لدراسة نتائج برنامج تعليمي معين لزيادة القدرة على التهجية عند أربعة صفوف من الطلاب نقيس القدرة على التهجية ، y ، لكل طالب عند نهاية البرنامج ، ونعتبر قياس القدرة الإبتدائية على التهجية ، x ، كمتحول مرافق . ويمكننا دراسة الفروق بين فعاليات الصفوف الأربعة بإستخدام المتحول y معدّلاً من أجل المتحول x ، أي بعد تعديله وفقاً لمقدار x .

وتعتمد طريقة تحليل التشتت من أجل الفروق بين المعالجات على فصل مجموع المربعات الكلي إلى عدة أجزاء . وإذا وجدنا متوسط مربعات المعالجات كبيراً بصورة كافية نرفض الفرضية القائلة بتساوي متوسطات المعالجات . وتقود طريقة تحليل تمام التشتت إلى أختبار الفرق بين متوسطات المعالجات من خلال فصل مجموع المربعات الكلي أيضاً إلى عدة أجزاء . وفي هذه الحالة نختبر الفروق بين متوسطات «الرواسب» وحيث الرواسب هي الفروق بين الملاحظات الفعلية وكمية تراجعية تعتمد على المتحول المرافق .

١٤ ـ ٢ تعريف المسألة في حالة تصنيف أحادي : في مسائل التصنيف الأحادي وبصورة خاصة في التصميمات التامة العشوائية ، يوجد t من المجتمعات. ونختار عينات عشوائية أحجامها n_i ، $(i = 1, ..., t)$ من المجتمعات المختلفة . وستكون العينة من المجتمع i على الشكل (X_{i1}, Y_{i1}) و (X_{i2}, Y_{i2}) ....و (X_{in_i}, Y_{in_i}) ، حيث يشير الدليل الأول إلى المجتمع ويشير الدليل الثاني إلى العنصر الخاص من العينة المأخوذة من ذلك المجتمع ويبين الجدول (١٤ ـ ١) مثالاً على بيان إحصائي تكون فيه $t = 3$ و $n_3 = 4 = n_1 = n_2$ ، وفي الجدول (١٤ ـ ٢) نجد مثالاً عددياً . وسنقدم في هذه الفقرة المبدأ العام الذي ينطلق منه تحليل تمام التشتت ، كما نقدم في الفقرات القادمة تفاصيل الحسابات العددية .

جدول ١٤ ـ ١

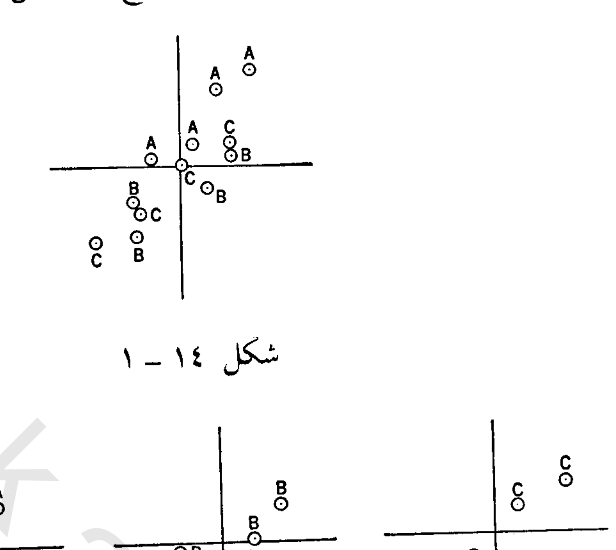
المعالجات

	A		B		C		
	x_{11}	y_{11}	x_{21}	y_{21}	x_{31}	y_{31}	
	x_{12}	y_{12}	x_{22}	y_{22}	x_{32}	y_{32}	
	x_{13}	y_{13}	x_{23}	y_{23}	x_{33}	y_{33}	
	x_{14}	y_{14}	x_{24}	y_{24}	x_{34}	y_{34}	
المجموع	$T_{x_{1.}}$	$T_{y_{1.}}$	$T_{x_{2.}}$	$T_{y_{2.}}$	$T_{x_{3.}}$	$T_{y_{3.}}$	$T_{x..}$ $T_{y..}$ المجموع الإجمالي
المتوسط	$\bar{x}_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$	$\bar{x}_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$	$\bar{x}_{3.}$	$\bar{y}_{3.}$	$\bar{x}..$ $\bar{y}..$ المتوسط الإجمالي

لنفرض أننا مثلنا ملاحظات الجدول (١٢ ـ ١) بيانياً في المستوى xoy حيث الفصل هو إنحراف الملاحـظة x عن المتوسط الإجمالي $\bar{x}..$ أي $(x-\bar{x}..)$ ، والترتيب هو إنحراف الملاحظة y عن المتوسط الإجمالي $\bar{y}..$ أي $(y-\bar{y}..)$ وأن التمثيل البياني كان كما في الشكل (١٤ ـ ١) حيث رمزنا بِـ A للنقاط (x,y) الموافقة للمعالجة A ، وبِـ B للنقاط الموافقة للمعالجة B ، وبِـ C للنقاط الموافقة للمعالجة C . وبإستخدام طريقـة التراجع البسيط التي درسناها في الفصل التاسع يمكننا حساب خط تراجع y على x من أجل هذه النقاط . ولنرمز لأمثال التراجع هذا بِـ b_t ولتشتت الإنحرافات عن خط التراجع بِـ $(S^2_{y.x})_t$ ، حيث نعني بالدليل t أننا إستخدمنا في حساب خط التراجع جميع ملاحظات التجربة . وبالطبع فإن كلاً من الفروق بين العينات والفروق ضمن كل عينة سيؤثر في حجم $(S^2_{y.x})_t$.

ونعتبر الآن المجموعات الثلاث من النقاط ، نقاط A ، نقاط B ، ونقاط C ، ونرسم كلاً منها بيانياً حول متوسطها الخاص (أي أن الفصل والترتيب في تمثيل المجموعة i هما على الترتيب $(x-\bar{x}_{i.})$ و $(y-\bar{y}_{i.})$) . فنحصل

على الشكل (١٤ ــ ٢) . ولنطبق الآن الفروع الثلاثة من



شكل ١٤ ــ ١

شكل ١٤ ــ ٢

الشكل (١٤ ــ ٢) فوق بعضها بحيث نحصل على الشكل (١٤ ــ ٣) ، ولنحسب خط تراجع y على x والتشتت حول خط التراجع مستخدمين النقاط كما تبدو في الشكل الجديد (١٤ ــ ٣) : ولنرمز لأمثال التراجع (ونسميه التراجع ضمن العينات) بِـ b_w وللتشتت بِـ $(S^2_{y.x})_w$

شكل ١٤ ــ ٣

وكما نعلم فإن خط التراجع يعطي متوسط y من أجل قيم مختلفة لِـ x وإذا كان لخطوط التراجع ضمن كل من المجتمعات الثلاثة نفس الميل فإن b_W يمثل تقديراً لهذا الميل ويكون $(S^2_{y.x})_W$ تقديراً للتشتت حول خط التراجع في كل من المجتمعات الثلاثة .

ونتوقع أن يكون التشتت حول خط التراجع في الشكل (١٤ ــ ٣) أقل منه في الشكل (١٤ ــ ١) بإعتبار أننا قسرنا الأشكال الفرعية الثلاثة في (١٤ ــ ٢) على أساس أن متوسطات المجتمعات الثلاثة متساوية . وعلى أي حال فإنه إذا كان التشتت $(S^2_{y.x})_W$ الموافق للشكل (١٤ ــ ٣) أصغر بصورة ملحوظة من التشتت $(S^2_{y.x})_t$ الموافق للشكل (١٤ ــ ١) ، فسنستنتج أن قسر الأشكال الفرعية الثلاثة في شكل واحد كان له تأثيره الهام على البيان الإحصائي ، ونقول بوجود **فروق** بين متوسطات y لا يمكن تفسيرها من خلال قياسات x .

١٤ ــ ٣ **الشروط المتعلقة بتحليل تمام التشتت** : الشروط التي يجب توفرها لتطبيق طريقة تحليل تمام التشتت تضم ، كما نتوقع ، تلك المطلوبة من أجل التراجع الخطي البسيط وتلك المطلوبة من أجل تحليل التشتت . وهكذا نجد الشروط المعتادة في الإستقلال ، التوزيع الطبيعي ، تجانس التشتتات ، كون المتحولات x مثبتة ، الخ . ولنكون أكثر تحديداً ، سنستعرض النماذج الموافقة لعدد من التصميمات الأكثر إستخداماً :

التصميم التام العشوائية :

$$Y_{ij} = \xi + \tau_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, t\,; j = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

تصميم الزمرة التامة العشوائية :

$$Y_{ij} = \xi + \rho_i + \tau_j + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, r; j = 1, \ldots, t \qquad (2)$$

تصميم المربع اللاتيني :

$$Y_{ij(k)} = \xi + \rho_i + \gamma_j + \tau_k + \beta\, X_{ij(k)} + \varepsilon_{ij(k)}$$
$$i = 1, \ldots, m\ ;\ j = 1, \ldots, m\ ;\ k = 1, \ldots, m \qquad (3)$$

تجربة عاملية بعاملين ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية :

$$Y_{ijk} = \xi + \rho_i + \alpha_j + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{jk} + \beta\, X_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$$
$$i = 1, \ldots, r\ ;\ j = 1, \ldots, a\ ;\ k = 1, \ldots, c \qquad (4)$$

ومن الأنسب التعبير عن هذه المعادلات مستخدمين إنحرافات المتحول x عن متوسطه . وعندئذ تصبح المعادلات السابقة على الترتيب :

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta(X_{ij} - \bar{X}) + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, t \qquad (5)$$

$$Y_{ij} = \mu + \rho_i + \tau_j + \beta(X_{ij} - \bar{X}) + \varepsilon_{ij} \qquad i = 1, \ldots, r \quad j = 1, \ldots, t \qquad (6)$$

$$Y = \mu + \rho_i + \gamma_j + \tau_k + \beta(X_{ij(k)} - \bar{X}) + \varepsilon_{ij(k)}$$
$$i = 1, \ldots, m\ ;\ j = 1, \ldots, m\ ;\ k = 1, \ldots, m \qquad (7)$$

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \gamma_k + (\alpha\gamma)_{jk} + \beta(X_{ijk} - \bar{X}) + \varepsilon_{ijk}$$
$$i = 1, \ldots, r\ ;\ j = 1, \ldots, a\ ;\ k = 1, \ldots, c \qquad (8)$$

حيث $\mu = \xi + \beta\bar{X}$، و $\bar{x}$ المتوسط الإجمالي للمقادير x . ونأخذ هنا بعين الإعتبار كل الشروط التي رأيناها في الفصول الخمسة السابقة حول المقادير المذكورة في هذه المعادلات .

ونضيف هنا شرطاً ضرورياً لكي يكون تطبيق طريقة تحليل تمام التشتت مشروعاً ، وهو أن المتحول المرافق x يجب ألا يتأثر بالمعالجات . أي أن المعالجات التي نطبقها على الوحدات التجريبية ، لكي نلحظ ونقيس تأثيراتها على قيم المتحول y ، يجب ألا يكون لها أي تأثير على قيم x . وإذا عدنا إلى

الفقرة السابقة نعبر عن هذا الشرط بقولنا أن خطوط التراجع البسيط الموافقة لكل من المجتمعات الـ t المدروسة يجب أن تكون متوازية . والفرضية التي التي نختبرها في هذه الحالة هي ما إذا كانت هذه الخطوط المتوازية ، متطابقة مع بعضها البعض ، أي ما إذا كانت متوسطات المتحول y الموافقة للمجتمعات الـ t المدروسة متساوية ، وذلك عندما نستخدم نفس القيمة لـ x في كل من هذه المجتمعات (متوسطات y متساوية بعد تعديلها من أجل قيم x) .

وعلى أي حال فإنه يمكن تطبيق طريقة تحليل تمام التشتت عندما تؤثر المعالجات في قيم المتحول x ، ولكن تفسير نتائج التجربة يكون مختلفاً في هذه الحالة . ولذلك فإن الباحث يجب أن يكون حذراً جداً عند تفسير نتائج تحليل تمام التشتت . وسندرس الآن بعض الأمثلة العددية التي تعين الباحث على تفسير بيان إحصائي قابل للتحليل وفقاً لطريقة تحليل تمام التشتت ، وتقدم له الطرق الحسابية الضرورية .

١٤ ـ ٤ **حالة التصميم التام العشوائية** : يمكن التعبير عن مجموع الجداءات على الشكل :

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{..})(y_{ij}-\bar{y}_{..})$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})(y_{ij}-\bar{y}_{i.})+n\sum_{i=1}^{t}(\bar{x}_{i.}-\bar{x}_{..})(\bar{y}_{i.}-\bar{y}_{..}) \quad (9)$$

حيث n هو عدد الملاحظات من أجل كل معالجة من المعالجات . ويدعى كل مجموع جداءات من هذا النوع بعد قسمته على عدد درجات الحرية الموافق بتمام التشتت . ويسمى الطرف الأيسر من (9) بمجموع الجداءات الكلي . والحد الأول من الطرف الأيمن يسمى مجموع جداءات الخطأ التجريبي ،

أما الحد الثاني من الطرف الأيمن فيسمى مجموع جداءات المعالجات . والأشكال الحسابية لهذه الكميات هي :

$$\text{مجموع الجداءات الكلي} = S_{xy} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, y_{ij} - \frac{T_{x..}\, T_{y..}}{nt} \qquad (10)$$

$$\text{مجموع جداءات المعالجات} = T_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{t} T_{x_{i.}}\, T_{y_{i.}} - \frac{T_{x..}\, T_{y..}}{nt} \qquad (11)$$

$$\text{مجموع جداءات الخطأ التجريبي} = E_{xy} = S_{xy} - T_{xy} \qquad (12)$$

ويمكن التحقق من صحة هذه الأشكال الحسابية بطريقة جبرية مماثلة لتلك المتبعة في الفصل الحادي عشر من أجل مجاميع المربعات الموافقة . أما مجاميع المربعات S_{xx} ، T_{xx} ، E_{xx} ، S_{yy} ، T_{yy} ، E_{yy} ، وهي ، على الترتيب مجموع المربعات الكلي ومجموع مربعات المعالجات ومجموع مربعات الخطأ ، وذلك من أجل كل من المتحول y والمتحول المرافق x ، فنحسبها تماماً كما في حالة تحليل التشتت .

نلخص هذه الحسابات في جدول تحليل تمام التشتت المبين في الجدول (١٤ ـ ٢) .

جدول ١٤ ــ ٢ تحليل تمام التشتت الموافق للتصميم التام العشوائية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات			الإنحرافات حول التراجع		
		$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	$\sum y^2-(\sum xy)^2/\sum x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
مابين المعالجات	$t-1$	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}			
ما بين الوحدات التجريبية ضمن المعالجات	$t(n-1)$	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$S_E = E_{yy} - E_{xy}^2/E_{xx}$	$t(n-1)-1$	$s_E^2 = \frac{S_E}{t(n-1)-1}$
المجموع	$tn-1$	$S_{xx} = T_{xx} + E_{xx}$	$S_{xy} = T_{xy} + E_{xy}$	$S_{yy} = T_{yy} + E_{yy}$	$S_{T+E} = S_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx}$	$nt-2$	
الفرق من أجل إختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للمعالجات					$S_{T+E} - S_E = T_{yy} - S_{xy}^2/S_{xx} + E_{xy}^2/E_{xx}$	$t-1$	$\frac{S_{T+E} - S_E}{t-1}$

ولإختبار الفرضية بأنه لا توجد فروق بين التأثيرات الحقيقية للمعالجات على المتحول y ، بعد التعديل من أجل تأثير المتحول x ، نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{T+E} - S_E)/t-1}{S_E/[t(n-1)-1]} = \frac{(S_{T+E} - S_E)/(t-1)}{s_E^2} \qquad (13)$$

بدرجات من الحرية هي : $\nu_1 = t-1$ و $\nu_2 = nt-t-1$

وبالإضافة إلى الإختبار F هذا فإنه من المستحسن إعداد جدول في متوسطات المعالجات بعد تعديلها ليساعدنا في تفسير نتائج التجربة . ويمكن حساب المتوسطات المعدّلة باستخدام العلاقة :

$$\text{adj. } \bar{y}_i = \bar{y}_i - b(\bar{x}_i - \bar{x}); \; i = 1, \ldots, t, \qquad (14)$$

حيث $b = E_{xy}/E_{xx}$. وتقدير تشتت المتوسط المعدّل هو :

$$\hat{v}(\text{adj. } \bar{y}_i) = s_E^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x}_i - \bar{x})^2}{E_{xx}} \right] \qquad (15)$$

وتقدير تشتت الفرق بين متوسطين معدلين هو :

$$\hat{v}(\text{adj. } \bar{y}_i - \text{adj. } \bar{y}_k) = s_E^2 \left[\frac{2}{n} + \frac{(\bar{x}_i - \bar{x}_k)^2}{E_{xx}} \right] \qquad (16)$$

ومن الواضح أننا نفترض سلفاً بأن أمثال التراجع β المذكور في المعادلة (5) غير الصفر ، لأنه ، فيما عدا ذلك ، يكون إدخال المتحول x المرافق في إعتبارنا مجرد تعقيد لا لزوم له . وأحياناً يرغب المجرب في التحقق من صحة هذا الفرض فيختبر الفرضية $H: \beta = 0$. ويمكنه القيام بذلك مستخدماً النسبة F المعرفة بالعلاقة :

$$F = \frac{E^2_{xy'} / E_{xx}}{S_E / (nt-t-1} = \frac{E^2_{xy} / E_{xx}}{s^2_E} \qquad (17)$$

بدرجات من الحرية $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = nt-t-1$. وتجدر الإشارة إلى أن $x = x-\bar{x}$ ، $y = y-\bar{y}$

لنحلل الآن مثالاً عددياً هو البيان الاحصائي المعطى في الجدول (١٤ ـ ٣)

جدول ١٤ ـ ٣ زيادة الوزن y والوزن الإبتدائي x في تجربة لإطعام الخنازير

	المعالجة							
	1		2		3		4	
	x	y	x	y	x	y	x	y
	30	165	24	180	34	156	41	201
	27	170	31	169	32	189	32	173
	20	130	20	171	35	138	30	200
	21	156	26	161	35	190	35	193
	33	167	20	180	30	160	28	142
	29	151	25	170	29	172	36	189
المجموع	160	939	146	1031	195	1005	202	1098

ونتيجة الحسابات نجد :

$$S_{xx} = T_{xx} + E_{xx} = (30)^2 + ... + (36)^2 - \frac{(703)^3}{24} = 726.96$$

$$S_{xy} = T_{xy} + E_{xy} = (30)(165) + ... + (36)(189) - \frac{(703)(4073)}{24}$$
$$= 948.04$$

$$S_{yy} = T_{yy} - E_{yy} = (165)^2 + ... + (189)^2 - \frac{(4073)^2}{24} = 8100.96$$

$$T_{xx} = \frac{(160)^2 + (146)^2 + (195)^2 + (202)^2}{6} - \frac{(703)^2}{24} = 365.46$$

$$T_{xy} = \frac{(160)(939) + (146)(1031) + (195)(1005) + (202)(1098)}{6}$$
$$- \frac{(703)(4073)}{24} = 451.21$$

$$T_{yy} = \frac{(939)^2 + (1031)^2 + (1055)^2 + (1098)^2}{6} - \frac{(4073)^2}{24}$$
$$= 2163.13$$

$$E_{xy} = S_{xx} - T_{xx} = 361.50$$

$$E_{xy} = S_{xy} - T_{xy} = 496.83$$

$$E_{yy} = S_{yy} - T_{yy} = 5937.83.$$

ونجد في الجدول (١٤ ــ ٤) تحليل تمام التشتت لهذا المثال العددي .

جدول ١٤ ـ ٤ تحليل تمام التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول ١٤ ـ ٣

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات			الإنحرافات حول التراجع		
		$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	$\sum y^2-(\sum xy)^2/\sum x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
ما بين المعالجات	3	365.46	451.21	2163.13			
ما بين الحيوانات التي تلقت نفس المعالجة	20	361.50	496.83	5937.83	5255.01	19	276.58
المجموع	23	726.96	984.04	8100.96	6864.61	22	
الفرق من أجل إختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للمعالجات					1609.60	3	536.53

والنسبة F هي $536.53/276.58 = 1.94$ بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 3$ و $\nu_2 = 19$. وهي نسبة غير هامة عند المستوى **.05**. وهكذا فإننا لا نستطيع رفض الفرضية القائلة بعدم وجود فروق بين التأثيرات الفعلية للمعالجات الأربعة على زيادة وزن الخنازير بعد تعديلها وفقاً للأوزان الإبتدائية للخنازير التي خضعت للتجربة. ويصدف هنا أننا نصل إلى نفس القرار حتى لو لم نقم بأية تعديلات من أجل المتحول المرافق x. ولكن النتيجة، في كثير من الأحيان، يمكن أن تتغير تماماً وفقاً لما إذا كنا نستخدم طريقة تحليل تمام التشتت أم لا. وهكذا فإن على الباحث أن يستعرض دائماً قابلية المسألة التي يدرسها للمعالجة وفق طريقة تحليل تمام التشتت.

ولإتمام مناقشة المثال العددي نقدم الجدول (١٤ ـ ٥) الذي يحوي المتوسطات المعدّلة للمعالجات.

جدول ١٤ ـ ٥ المتوسطات المعدَّلة للمعالجات من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٤ ـ ٣).

$(\bar{x} = 29.29 \quad \bar{y} = 169.71 \quad b = 496.83/361.50 = 1.374)$

	المعالجة			
	1	2	3	4
$\bar{x}_i$	26.67	24.33	32.50	33.67
$\bar{x}_i - \bar{x}$	–2.62	–4.96	3.21	4.38
$b(\bar{x}_i - \bar{x})$	–3.60	–6.82	4.41	6.02
$\bar{y}_i$	156.50	178.65	163.09	176.98
الإنحراف المعياري لِـ adj. $\bar{y}_i$	7.17	8.06	7.35	7.80

كما نختبر أيضاً الفرضية $H: \beta = 0$ فنحسب النسبة:

$$F = \frac{(496.83)^2 / 361.50}{276.58} = 2.47$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = 19$. وبما أن قيمة F لا تتجاوز $F_{.05}(1,19) = 4.38$ فلا نستطيع رفض الفرضية $\beta=0$ وفي مثل هذه الحالة لا يكون استخدامنا لتحليل تمام التشتت مبرراً. وربما كان هذا هو السبب في أن تحليل تمام التشتت لم يقدم أي جديد عما كنا سنحصل عليه فيما لو استخدمنا تحليل التشتت البسيط.

١٤ ـ ٥ حالة تصميم الزمرة التامة العشوائية : النموذج الموافق لهذه الحالة معطى في المعادلة (6) ، وتحليل تمام التشتت معطى في الجدول (١٤ـ٦) ، ويتم حساب الكميات R_{xx} ، T_{xx} ، E_{xx} ، R_{yy} ، T_{yy} ، E_{yy} كما في تحليل التشتت العادي الموافق لتصميم الزمرة التامة العشوائية. أما مجاميع الجداءات R_{xy} ، T_{xy} و E_{xy} فنحسبها باستخدام العلاقات التالية :

$$\text{(18)} \quad \sum xy = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{t} x_{ij} y_{ij} - \frac{1}{rt}(T_{x..})(T_{y..}) = \text{مجموع الجداءات الكلي}$$

$$\text{(19)} \quad R_{xy} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{r} (B_{x_{i.}})(B_{y_{i.}}) - \frac{1}{rt}(T_{x..})(T_{y..}) = \text{مجموع جداءات الزمر}$$

$$\text{(20)} \quad T_{xy} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{t} (T_{x.j})(T_{y.j}) - \frac{1}{rt}(T_{x..})(T_{y..}) = \text{مجموع جداءات المعالجات}$$

$$\text{(21)} \quad E_{xy} = \sum xy - R_{xy} - T_{xy} = \text{مجموع جداءات الخطأ التجريبي}$$

(22) $T_{x..} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{t} x_{ij}$ = مجموع الكلي للملاحظات x

(23) $T_{y..} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{t} y_{ij}$ = المجموع الكلي للملاحظات y .

(24) $B_{x_{i.}} = \sum_{j=1}^{t} x_{ij}$ = مجموع الملاحظات x ضمن الزمرة i .

(25) $B_{y_{i.}} = \sum_{j=1}^{t} y_{ij}$ = مجموع الملاحظات y ضمن الزمرة i .

(26) $T_{x.j} = \sum_{i=1}^{r} x_{ij}$ = مجموع الملاحظات x الموافقة للمعالجة j .

$T_{y.j} = \sum_{i=1}^{r} y_{ij}$ = مجموع الملاحظات y الموافقة للمعالجة j .

ولإختبار الفرضية بأنه لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية للمعالجات على قيمة المتحول y ، بعد تعديلها من أجل تأثير المتحول x ، نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{T+E} - S_E)/(t-1)}{S_E/[(r-1)(t-1)-1]} = \frac{(S_{T+E} - S_E)/(t-1)}{s_E^2} \tag{27}$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = t-1$ و $\nu_2 = (r-1)(t-1)-1$.

وكما في الفقرة السابقة ، فإنه من المفيد وضع جدول يحوي متوسطات المعالجات بعد تعديلها ، وإختبار الفرضية $H: \beta = 0$ حيث β هو الوسيط المذكور في النموذج المعرف بالمعادلة (6) ونحسب المتوسطات المعدّلة للمعالجات بإستخدام العلاقة :

$$adj.\bar{y}_{.j} = \bar{y}_{.j} - b(\bar{x}_{.j} - \bar{x}), \quad j = 1, \ldots, t, \tag{28}$$

حيث :

$$b = E_{xy} / E_{xx} \tag{29}$$

وتقدير تشتت المتوسط المعدّل لمعالجة هو :

$$\hat{v}(adj.\bar{y}_{.j}) = s_E^2 \left[\frac{1}{r} + \frac{(\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2}{E_{xx}}\right] \tag{30}$$

وتقدير تشتت الفرق بين المتوسطين المعدلين لمعالجتين j و j' هو :

$$\hat{v}(ad.\bar{y}_{.j} - adj.\bar{y}_{.j'}) = s_E^2 \left[\frac{2}{r} + \frac{(\bar{x}_{.j} - \bar{x}_{.j'})^2}{E_{xx}}\right] \tag{31}$$

ولاختبار الفرضية $\beta = 0$ نحسب النسبة :

$$F = \frac{E_{xy}^2 \,/\, E_{xx}}{S_E/[(r-1)\,(t-1)-1]} = \frac{E_{xy}^2/E_{xx}}{s_E^2} \qquad (32)$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 1$ ، $\nu_2 = (r-1)\,(t-1)-1$.

جدول ١٤ ـ ٦ تحليل تمام التشتت من أجل تصميم الزمرة التامة العشوائية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات			الإنحرافات حول التراجع		
		Σx^2	Σxy	Σy^2	$\Sigma y^2-(\Sigma xy)^2/\Sigma x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
الزمر	$r-1$	R_{xx}	R_{xy}	R_{yy}			
المعالجات	$t-1$	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}			
الخطأ التجريبي	$(r-1)(t-1)$	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$S_E=E_{yy}-E_{xy}^2/E_{xx}$	$(r-1)(t-1)-1$	$s_E^2 = S_E/[(r-1)(t-1)-1]$
المعالجات + الخطأ	$r(t-1)$	$S_{xx}=T_{xx}+E_{xx}$	$S_{xy}=T_{xy}+E_{xy}$	$S_{yy}=T_{yy}+E_{yy}$	$S_{T+E}=S_{yy}-S_{xy}^2/S_{xx}$	$r(t-1)-1$	
الفرق من أجل إختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للمعالجات					$S_{T+E}-S_E=T_{yy}-S_{xy}^2/S_{xx}+E_{xy}^2/E_{xx}$	$t-1$	$(S_{T+E}-S_E)/(t-1)$

وكمثال عددي على تحليل تمام التشتت في تصميم الزمرة التامة العشوائية ، سنحلل البيان الإحصائي المعطى في الجدول (١٤ ـ ٧) .

جدول ١٤ ـ ٧ إنتاج ثلاث فصائل من نوع معين من المحاصيل في تصميم الزمرة التامة العشوائية بأربع زمر .

(x = إنتاج الوحدة التجريبية في السنة التمهيدية تحت شروط تجريبية منتظمة ؛ y = إنتاج نفس الوحدة التجريبية في سنة التجربة حيث نستخدم الفصائل أو الأنواع الثلاثة من المحصول) .

الزمرة		الفصائل			مجموع الزمر
		A	B	C	
1	x	54	51	57	162
	y	64	65	72	201
2	x	62	64	60	186
	y	68	69	70	207
3	x	51	47	46	144
	y	54	60	57	171
4	x	53	50	41	144
	y	62	66	61	189
مجموع المعالجة	x	220	212	204	636
	y	248	260	260	768

والحسابات الضرورية هي :

$$\sum x^2 = (54)^2 + \ldots + (41)^2 - \frac{(636)^2}{12} = 514$$

$$R_{xx} = \frac{(162)^2 + (186)^2 + (144)^2 + (144)^2}{3} - \frac{(636)^2}{12} = 396$$

$$T_{xx} = \frac{(220)^2 + (212)^2 + (204)^2}{4} - \frac{(636)^2}{12} = 32$$

$$E_{xx} = 514 - 396 - 32 = 86$$

$$\sum y^2 = (64)^2 + \ldots + (61)^2 - \frac{(768)^2}{12} = 324$$

$$R_{yy} = \frac{(201)^2 + (207)^2 + (171)^2 + (189)^2}{3} - \frac{(768)^2}{12} = 252$$

$$T_{yy} = \frac{(248)^2 + (260)^2 + (260)^2}{4} - \frac{(768)^2}{12} = 24$$

$$E_{yy} = 324 - 252 - 24 = 48$$

$$\sum xy = (54)\,(64) + \ldots + (41)\,(61) - \frac{(636\,(768)}{12} = 286$$

$$R_{xy} = \frac{(162)\,(201) + (186)\,(207) + (144)\,(171) + (144)\,(189)}{3}$$

$$- \frac{(636)\,(768)}{12} = 264$$

$$T_{xy} = \frac{(220)\,(248) + (212)\,(260) + (204)\,(260)}{4} - \frac{(636)\,(768)}{12}$$

$$= -24$$

$$E_{xy} = 286 - 264 - (-24) = 46$$

ونلخص هذه النتائج في الجدول (١٤ ـ ٨).

جدول ١٤ ـ ٨ تحليل تمام التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٤ ـ ٧)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات			الإنحرافات حول التراجع		
		$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	$\sum y^2-(\sum xy)^2/\sum x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
الزمر (التكرارات)	3	396	264	252			
المعالجات (الفصائل)	2	32	−24	24			
الخطأ التجريبي	6	86	46	48	23.4	5	4.68
المعالجات + الخطأ التجريبي	8	118	22	72	67.9	7	
الفرق من أجل إختبارات ما بين المتوسطات المعدلة للفصائل					44.5	2	22.25

لنختبر أولاً الفرضية $H: \beta = 0$ ، أي أن الأمثال الفعلية للتراجع تساوي الصفر ، ذلك لأنه في حالة عدم رفض هذه الفرضية ، فإن تحليل تمام التشتت كله يعوزه التبرير . وهكذا نحسب النسبة :

$$F = [(46)^2/48]/4.68 = 9.42$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = 5$ وبما أن $F > F_{.05}(1,5) = 6.61$ فيمكننا القول بأن $\beta \neq 0$ مما يبرر القيام بتحليل تمام التشتت .

وقبل إختبار الفرضية H_0 بأن الفروق بين التأثيرات الفعلية للأصناف ، بعد التعديل من أجل المتحول المرافق x ، مساوية للصفر ، نلاحظ أن تحليل التشتت العادي سيعطي :

$$F = (24/2) / (48/6) = 1.5$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 2$ و $\nu_2 = 6$ مما لا يسمح لنا برفض الفرضية القائلة بأنه لا توجد فروق حقيقية بين إنتاجية الأصناف الثلاثة . ويمكن أن نرى الآن بوضوح ما سيقدمه لنا تحليل تمام التشتت من جديد في الموقف ، إذا كان هناك أي جديد ، ولذلك نحسب النسبة F التي تقدمها طريقة تحليل تمام التشتت من أجل إختبار الفرضية H_0 المذكورة أعلاه ، أي إختبار الفروق بين الأصناف الثلاثة ، بعد تعديل الإنتاج وفقاً للفروق الطبيعية في الخصوبة من وحدة تجريبية إلى وحدة تجريبية أخرى مقاسة من خلال تطبيق شروط تجريبية منتظمة على هذه الوحدات . ومن الجدول (١٤ ـ ٨) نجد بالاستفادة من المعادلة (27) أن :

$$F = 22.25/4.68 = 4.75$$

بدرجات من الحرية تساوي $\nu_1 = 2$ و $\nu_2 = 5$ وبما أنه $F = 4.75$ يقع بين $F_{.10}(2,5) = 3.78$ و $F_{.05}(2,5) = 5.79$ فلا نقول عادة أن الفروق بين الأصناف هامة من وجهة النظر الإحصائية . ولكن إنتقاء

مستوى الأهمية ٥٪ إختياري ، ولذلك فإن النتائج السابقة قد تشير إلى فروق لا يمكن إهمالها . وبالإضافة إلى ذلك نلاحظ أن تعديل الإنتاج من أجل الخصوبة التي تتغير من وحدة تجريبية إلى أخرى أدى إلى قيمة لِـ F أقرب بكثير إلى القيمة الحرجة (أي حدود منطقة الرفض) ، مما يلفت نظر المجرب إلى أنه من المعقول جداً أن يكون إختلاف الخصوبة من وحدة إلى أخرى هو الذي يحجب الفروق الحقيقية بين الأصناف وأنه إذا أعيد تنفيذ التجربة بعدد أكبر من التكرارات فقد نصل إلى نتائج جديدة هامة .

١٤ ـ ٦ **تصميم المربع اللاتيني** : النموذج الموافق لهذه الحالة معطى في المعادلة (7) والحسابات المطلوبة إلى جانب تلك التي عرفناها في حالة تحليل التشتت العادي هي مجاميع الجداءات التي نحصل عليها وفق العلاقات التالية :

(33) مجموع الجداءات الكلي $= \Sigma xy = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_{ij(k)} y_{ij(k)} - \frac{1}{m^2}(T_{x..})(T_{y..})$.

(34) مجموع جداءات الصفوف $= R_{xy} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (T_{x_{i.}})(T_{y_{i.}}) - \frac{1}{m^2}(T_{x..})(T_{y..})$

(35) مجموع جداءات الأعمدة $= C_{xy} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (T_{x.j})(T_{y.j}) - \frac{1}{m^2}(T_{x..})(T_{y..})$

(36) مجموع جداءات المعالجات $= T_{xy} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} ({}_xT_k)({}_yT_k) - \frac{1}{m^2}(T_{x..})(T_{y..})$

حيث :

$T_{x..}$ = المجموع الكلي للملاحظات x .

$T_{y..}$ = المجموع الكلي للملاحظات y .

$T_{xi.}$ = مجموع الملاحظات x ضمن الصف i .

$T_{y.j}$ = مجموع الملاحظات y ضمن العمود j .

${}_xT_k$ = مجموع الملاحظات x الموافقة للمعالجة k .

${}_yT_k$ = مجموع الملاحظات y الموافقة للمعالجة k .

ومجموع جداءات الخطأ التجريبي هو :

$$E_{xy} = \sum xy - R_{xy} - C_{xy} - T_{xy} \qquad (37)$$

وقد لخصنا نتائج هذه الحسابات في الجدول (١٤ ـ ٩) . ولاختبار الفرضية $H: \beta = 0$ نحسب النسبة :

$$F = \frac{E_{xy}^2/E_{xx}}{S_E/[(m-1)\ (m-2)-1]} = \frac{E_{xy}^2/E_{xx}}{s_E^2} \qquad (38)$$

بدرجات من الحرية $\nu_1 = 1$ و$\nu_2 = (m-1)\ (m-2)-1$. ولإختبار الفرضية بعدم وجود فروق بين المتوسطات المعدّلة للمعالجات نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{T+E} - S_E/(m-1)}{S_E/[(m-1)\ (m-2)-1] =} = \frac{(S_{T+E} - S_E)/(m-1)}{s_E^2} \qquad (39)$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = m-1$ و $\nu_2 = (m-1)\ (m-2)-1$ ونحسب

المتوسط المعدَّل للمعالجة k من العلاقة :

$$\text{adj. } \bar{y}_{..(k)} = \bar{y}_{..(k)} - b(\bar{x}_{..(k)} - \bar{x}) \tag{40}$$

حيث :

$$b = E_{xy} / E_{xx} \tag{41}$$

وتقدير تشتت المتوسط المعدّل لمعالجة هو :

$$\hat{v}\,(\text{adj.}\bar{y}_{..(k)}) = s_E^2 \left[\frac{1}{m} + \frac{(\bar{x}_{..(k)} - \bar{x})^2}{E_{xx}}\right] \tag{42}$$

وتقدير تشتت الفرق بين متوسطين معدّلين لمعالجتين k و k' هو :

$$\hat{v}\,(\text{adj.}\bar{y}_{..(k)} - \text{ad.}\bar{y}_{..(k')}) = s_E^2 \left[\frac{2}{m} + \frac{(\bar{x}_{..(k)} - \bar{x}_{..(k')})^2}{E_{xx}}\right] \tag{43}$$

جدول ١٤ ـ ٩ تحليل تمام التشتت من أجل تصميم المربع اللاتيني

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات			الإنحرافات حول التراجع		
		$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	$\sum y^2-(\sum xy)^2/\sum x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
الصفوف	$m-1$	R_{xx}	R_{xy}	R_{yy}			
الأعمدة	$m-1$	C_{xx}	C_{xy}	C_{yy}			
المعالجات	$m-1$	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}			
الخطأ التجريبي	$(m-1)(m-2)$	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$S_E=E_{yy}-E_{xy}^2/E_{xx}$	$(m-1)(m-2)-1$	$s_E^2 = S_E/[(m-1)(m-2)-1]$
المعالجات + الخطأ	$(m-1)^2$	$S_{xx}=T_{xx}+E_{xx}$	$S_{xy}=T_{xy}+E_{xy}$	$S_{yy}=T_{yy}+E_{yy}$	$S_{T+E}= S_{yy}-S_{xy}^2/S_{xx}$	$(m-1)^2-1$	
الفرق من أجل إختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للمعالجات					$S_{T+E}-S_E= T_{yy}-S_{xy}^2/S_{xx}+E_{xy}^2/E_{xx}$	$m-1$	$(S_{T+E}-S_E)/(m-1)$

١٤ ـ ٧ تجربة عاملية بعاملين ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية :

عندما نعالج تجربة عاملية نكون قادرين على اختبار ما بين المتوسطات المعدّلة من أجل كل عامل من العوامل ومن أجل كل التفاعلات . وبالإضافة إلى الحسابات التي إستعرضناها في الفقرة (١٣ ـ ٤) من أجل تحليل التشتت العادي لتجربة عاملية تحوي عاملين ، نقدم فيما يلي العلاقات التي تمكننا من حساب مجاميع الجداءات :

(44) $\sum xy =$ مجموع الجداءات الكلي .

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} X_{ijk} Y_{ijk} - \frac{1}{rab}(T_{X\cdots})(T_{Y\cdots})$$

(45) $R_{xy} =$ مجموع جداءات التكرارات .

$$\frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{r}(R_{Xi\cdot\cdot})(R_{Yi\cdot\cdot}) - \frac{1}{rab}(T_{X\cdots})(T_{Y\cdots})$$

(46) ${}_{ab}S_{xy} =$ مجموع الجداءات من أجل الجدول a × b

$$= \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b}\left(\sum_{i=1}^{r} X_{ijk}\right)\left(\sum_{i=1}^{r} Y_{ijk}\right) - \frac{1}{rab}(T_{X\cdots})(T_{Y\cdots})$$

مجموع جداءات الخطأ $= E_{xy} = \sum xy - R_{xy} - {}_{ab}S_{xy}$

مجموع الجداءات من أجل العامل a $= A_{xy}$ (47)

$$= \frac{1}{rb}\sum_{j=1}^{a}\Big(\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{b} x_{ijk}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{b} y_{ijk}\Big) - \frac{1}{rab}(T_{x\ldots})(T_{y\ldots})$$

مجموع الجداءات من أجل العامل b $= B_{xy}$ (48)

$$= \frac{1}{ra}\sum_{k=1}^{b}\Big(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a} x_{ijk}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{a} y_{ijk}\Big) - \frac{1}{rab}(T_{x\ldots})(T_{y\ldots})$$

مجموع الجداءات من أجل التفاعل AB $= (AB)_{xy} = {}_{ab}S_{xy} - A_{xy} - B_{xy}$

(49)

حيث :

$T_{x\ldots} =$ المجموع الإجمالي للملاحظات x .

$T_{y\ldots} =$ المجموع الإجمالي للملاحظات y .

مجموع الملاحظات x ضمن التكرار i . $= R_{x_{i..}} = \sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} x_{ijk}$

مجموع الملاحظات y ضمن التكرارات i $= R_{y_{i..}} = \sum_{j=1}^{a}\sum_{k=1}^{b} y_{ijk}$

ونلخص النتائج في الجدول (١٤ ـ ١٠) . ونعرض فيما يلي الفرضيات التي نريد إختبارها والنسبة F الموافقة لكل منها :

(i) الفرضية بأنه لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية لمستويات العامل a على قيم المتحول y بعد تعديلها من أجل المتحول المرافق x . ولاختبار هذه الفرضية نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{A+B} - S_E)/(a-1)}{S_E/[(r-1)(ab-1)-1]} = \frac{(S_{A+E} - S_E)/(a-1)}{s_E^2} \qquad (50)$$

(ii) الفرضية بأنه لا توجد فروق بين التأثيرات الفعلية لمستويات العامل b على قيم المتحول y بعد تعديلها من أجل المتحول المرافق x ولاختبار هذه الفرضية نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{B+E} - S_E)/(b-1)}{S_E/[(r-1)(ab-1)-1]} = \frac{(S_{B+E} - S_E)/(b-1)}{s_E^2} \qquad (51)$$

(iii) الفرضية بأنه لا يوجد تفاعل بين العاملين a و b في مجال تأثيرهما على قيم المتحول y بعد تعديلها من أجل المتحول المرافق x . ولإختبار هذه الفرضية نحسب النسبة :

$$F = \frac{(S_{AB+E} - S_E)/(a-1)(b-1)}{S_E/[(r-1)(ab-1)-1]} = \frac{(S_{AB+E} - S_E)/(a-1)(b-1)}{s_E^2}$$

ولاختبار الفرضية $H : \beta = 0$ نحسب النسبة :

$$F = \frac{E_{xy}^2 / E_{xx}}{s_E^2} \tag{53}$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = (r-1)(ab-1)-1$.

ونحصل على تقديرات لتشتتات المتوسطات المعدّلة للتأثيرات من العلاقات التالية :

جدول ١٤ ـ ١٠ تحليل تمام التشتت من أجل تجربة عاملية بعاملين ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات Σx^2	Σxy	Σy^2	الإنحرافات حول التراجع $\Sigma y^2-(\Sigma xy)^2/\Sigma x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
التكرارات	$r-1$	R_{xx}	R_{xy}	R_{yy}			
المعالجات : A	$a-1$	A_{xx}	A_{xy}	A_{yy}			
B	$b-1$	B_{xx}	B_{xy}	B_{yy}			
AB	$(a-1)(b-1)$	$(AB)_{xx}$	$(AB)_{xy}$	$(AB)_{yy}$			
الخطأ التجريبي	$(r-1)(ab-1)$	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$S_E=E_{yy}-E^2_{xy}/E_{xx}$	$(r-1)(ab-1)-1$	$s^2_E = S_E/[(r-1)(ab-1)-1]$
A + الخطأ	$(a-1)+(r-1)(ab-1)$	${}_AS_{xx} = A_{xx}+E_{xx}$	${}_AS_{xy} = A_{xy}+E_{xy}$	${}_AS_{yy} = A_{yy}+E_{yy}$	$S_{A+E} = {}_AS_{yy}-{}_AS^2_{xy}/{}_AS_{xx}$	$(a-1)+(r-1)(ab-1)-1$	
الفرق من أجل اختبار ما بين متوسطات التاثير A المعدّلة					$S_{A+E}-S_E=A_{yy}-{}_AS^2_{xy}/{}_AS_{xx}+E^2_{xy}/E_{xx}$	$a-1$	$(S_{A+E}-S_E)/(a-1)$
B + الخطأ	$(b-1)+(r-1)(ab-1)$	${}_BS_{xy} = B_{xx}+E_{xx}$	${}_BS_{xx} = B_{xy}+E_{xy}$	${}_BS_{yy} = B_{yy}+E_{yy}$	$S_{B+E} = {}_BS_{yy}-{}_BS^2_{xy}/{}_BS_{xx}$	$(b-1)+(r-1)(ab-1)-1$	
الفرق من أجل إختبار ما بين متوسطات التأثير B المعدّلة					$S_{B+E}-S_E=B_{yy}-{}_BS^2_{xy}/{}_BS_{xx}+E^2_{xy}/E_{xx}$	$b-1$	$(S_{B+E}-S_E)/(b-1)$
AB + الخطأ	$(a-1)(b-1)+(r-1)(ab-1)$	${}_{AB}S_{xx} = (AB)_{xx}+E_{xx}$	${}_{AB}S_{xy} = (AB)_{xy}+E_{xy}$	${}_{AB}S_{yy} = (AB)_{yy}+E_{yy}$	$S_{AB+E} = {}_{AB}S_{yy}-{}_{AB}S^2_{xy}/{}_{AB}S_{xx}$	$(a-1)(b-1)+(r-1)(ab-1)-1$	
الفرق من أجل إختبار ما بين تأثيرات التفاعل AB المعدّلة					$S_{AB+E}-S_E=(AB)_{yy}-{}_{AB}S^2_{xy}/{}_{AB}S_{xx}+E^2_{xy}/E_{xx}$	$(a-1)(b-1)$	$(S_{AB+E}-S_E)/(a-1)(b-1)$

$$\text{A التأثير } \hat{v}(\text{adj. } \overline{y}_{.j.}) = s_E^2 \left[\frac{1}{rb} + \frac{(\overline{x}_{.j.} - \overline{x})^2}{E_{xx}} \right] \quad (50)$$

$$\text{B التأثير } \hat{v}(\text{adj. } \overline{y}_{..k}) = s_E^2 \left[\frac{1}{ra} + \frac{(\overline{x}_{..k} - \overline{x})^2}{E_{xx}} \right] \quad (51)$$

$$\text{AB التأثير } \hat{v}(\text{ad. } \overline{y}_{.jk}) = s_E^2 \left[\frac{1}{r} + \frac{(\overline{x}_{.jk} - \overline{x})^2}{E_{xx}} \right] \quad (52)$$

لنأخذ كمثال على تحليل تمام التشتت لتجربة عاملية ضمن تصميم الزمرة التامة العشوائية البيان الإحصائي في الجدول (١٤ ـ ١١) حيث نعتبر الحظائر الخمسة كتكرارات ومستويات العامل a هي الرواتب الغذائية المختلفة المطبقة على حيوانات التجربة ، وله ثلاثة مستويات A,B,C ، والعامل b هو عامل الجنس وله مستويان الذكوروالإناث .

جدول ١٤ ـ ١١ الوزن الإبتدائي وزيادة الوزن في تجربة مقارنة لتغذية عجول الخنازير

(x = الوزن الإبتدائي بالرطل الإنكليزي ، y = زيادة الوزن بالرطل الإنكليزي)

الحظيرة		معالجات التغذية A		B		C		المجموع
		ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	ذكر	أنثى	
I	x	38	48	39	48	48	48	269
	y	9.25	9.94	8.51	10.00	9.11	9.75	56.83
II	x	35	32	38	32	37	28	202
	y	8.21	9.48	9.95	9.24	8.50	8.66	54.04
III	x	41	35	46	41	42	33	238
	y	9.32	9.32	8.43	9.34	8.90	7.63	52.49
IV	x	48	46	40	46	42	50	272
	y	10.56	10.90	8.86	9.68	9.51	10.37	59.88
V	x	43	32	40	37	40	30	222
	y	10.42	8.82	9.20	9.67	8.76	8.57	55.44
المجموع	x	205	193	203	204	209	189	1203
	y	48.03	48.46	44.95	47.93	44.78	44.98	279.13

وباتباع الإجراءات الحسابية التي يلخصها الجدول (١٤ ـ ١٠) نحصل على النتائج المبينة في الجدول (١٤ ـ ١٢) .

جدول ١٤ ـ ١٢ تحليل تمام التشتت من أجل البيان الإحصائي في الجدول (١٤ ـ ١١)

مصدر التغير	درجات الحرية	مجاميع المربعات والجداءات			الإنحرافات حول التراجع		
		Σx^2	Σxy	Σy^2	$\Sigma y^2-(\Sigma xy)^2/\Sigma x^2$	درجات الحرية	متوسط المربعات
التكرارات (الحظائر)	4	605.87	39.905	4.8518			
المعالجات							
الطعام	2	5.40	−0.147	2.2686			
الجنس	1	32.03	−3.730	0.4344			
الجنس × الطعام	2	22.47	3.112	0.4761			
الخطأ التجريبي	20	442.93	39.367	8.3144	4.8155	19	0.2534
الطعام + الخطأ	22	448.33	39.220	10.5830	7.1520	21	
الفرق من أجل اختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للطعام					2.3365	2	1.16825
الجنس + الخطأ	21	447.96	35.637	8.7488	6.0749	20	
الفرق من أجل اختبار ما بين المتوسطات المعدّلة للجنس					1.2594	1	1.2594
(الجنس × الطعام) + الخطأ	22	465.40	42.479	8.7905	4.9133	21	
الفرق من أجل إختبار ما بين التأثيرات المعدّلة لِـ (الجنس × الطعام)					0.0978	2	0.0489

ولاختبار الفرضية $H: \beta = 0$ ، نحسب النسبة :

$$F = \frac{(39.367)^2/442.93}{0.2534} = 13.81$$

بدرجات من الحرية هي $\nu_1 = 1$ و $\nu_2 = 19$ وهي نسبة هامة عند المستوى $\alpha = .01$. ويمكن إختبار أهمية التأثيرات المختلفة والنسب F الموافقة هي :

الطعام : $F = \frac{1.16825}{0.2534} = 4.61$

الجنس : $F = \frac{1.2594}{0.2534} = 4.97$

الطعام × الجنس : $F = \frac{0.0489}{0.2534} = 0.19$

حيث درجات الحرية مبينة في الجدول (١٤ ـ ١٢) . ويجب مقارنة هذه النسب (والإستقراءات الناتجة عنها) مع تلك الناتجة عن تحليل التشتت العادي حول زيادة الوزن دون أن نأخذ في الإعتبار الأوزان الإبتدائية . وستساعد هذه المقارنات القارىء على فهم الأسس التي يعتمد عليها تحليل تمام التشتت ، كما ستساعد ، في هذا المثال ، على إيضاح تأثير الأوزان الإبتدائية على مقدار الزيادة في الوزن تحت الشروط التي تحددها التجربة . ولكي يكون التحليل تاماً يجب إقامة جدول للمتوسطات المعدلة للمعالجات مع انحرافاتها المعيارية .

تمارين

أ ـ أعطت تجربة منفذة وفقاً لتصميم الزمرة التامة العشوائية مجاميع المربعات والجداءات التالية :

مصدر التغير	درجات الحرية	$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$	b
التكرارات	5	200	600	4000	
المعالجات	5	100	200	2500	2
الخطأ التجريبي	25	300	1200	7500	4

أ ـ هل تراجع y على x هام عند المستوى $\alpha = .05$ ؟

ب ـ هل الفروق بين متوسطات المعالجات بعد تبديلها من أجل x هامة عند المستوى $\alpha = .05$

جـ ـ ما هي النتائج المستخلصة فيما يتعلق بتأثير المعالجات ؟

٢ ـ قارنا أنواعاً من فول الصويا في زمر تامة عشوائية بأربع تكرارات فلم نجد فروقاً هامة بالنسبة للإنتاج y ، ولكن لوحظ أن حدوث الإصابات ، x ، يختلف من نوع إلى آخر . وفيما يلي جدول بمجاميع المربعات والجداءات .

مصدر التغير	درجات الحرية	$\sum x^2$	$\sum xy$	$\sum y^2$
الأنواع	9	4684	−532	112
الخطأ	27	3317	−650	216

والمطلوب إختبار الفرضية بأن الإنتاج ، معدلاً من أجل الإصابات ، لا تختلف من نوع إلى آخر .

٣ ـ في البيان الإحصائي التالي نجد إنتاج الشوندر السكري y بالطن / فدان ، و x عدد رؤوس الشوندر في كل وحدة تجريبية . والمطلوب القيام بتحليل تمام التشتت .

السماد المطبق (المعالجة)	(i)		الزمرة (j) 1	2	3	4	5	6	مجموع ومتوسط المعالجة	
لاسماد	1	x	183	176	291	254	225	249	1378	229.7
		y	2.45	2.25	4.38	4.35	3.42	3.27	20.12	3.353
سوبر فوسفات P	2	x	356	300	301	271	288	258	1774	295.7
		y	6.71	5.44	4.92	5.23	6.74	4.74	33.78	5.630
حامض البوتاسيوم K	3	x	224	258	244	217	192	236	1371	228.5
		y	3.22	4.14	2.32	4.42	3.28	4.00	21.38	3.563
K + P	4	x	329	283	308	326	318	318	1882	313.7
		y	6.34	5.44	5.22	8.00	6.96	6.96	38.92	6.487
N نيترات الصوديوم + P	5	x	371	354	352	331	290	410	2108	3513
		y	6.48	7.11	5.88	7.54	6.61	8.86	42.48	7.080
		x	230	221	237	193	247	250	1378	229.7
N + K	6	y	3.70	3.24	2.82	2.15	5.19	4.31	21.23	3.538
N + K + P	7	x	322	367	400	333	314	385	2.121	353.5
		y	6.10	7.68	7.37	7.83	7.75	7.39	44.12	7.353
مجموع الزمرة			2015	1959	2133	1925	1874	2106	12012	286.0
			35.00	35.30	32.91	39.52	39.95	39.35	222.03	3.286

٤ ـ فيما يلي نتائج تجربة مربع لاتيني 5 × 5 حيث y هو الإنتاج من البطاطا الإيرلندية رقم 1 مقاسه بالأكياس / فدان ، و x هو النسبة المئوية للبطاطا رقم 1 . والمعالجات هي كميات مختلفة (بالرطل الإنكليزي) من السماد P_2O_5 في الفدان : a = 0 ، b = 40 ، c = 80 ، d = 120 ، e = 160

الصفوف	الأعمدة 1			2			3			4			5			المجموع	
	t	y	x	t	y	x	t	y	x	t	y	x	t	y	x	y	x
1	a	134.0	91	a	149.1	88	a	141.3	87	a	161.3	91	a	149.2	91	434.9	448
2	b	148.5	90	b	148.5	91	b	199.3	94	b	148.5	90	b	152.7	93	797.5	458
3	c	145.2	93	c	149.5	95	c	119.9	90	c	149.2	94	c	145.8	90	709.6	462
4	d	171.1	91	d	169.0	94	d	144.9	89	d	170.8	95	d	130.4	88	786.2	457
5	e	175.8	91	e	153.4	94	e	168.9	92	e	167.6	96	e	141.5	93	807.2	466
المجموع		774.6	456		769.5	462		774.3	452		797.4	466		719.6	455	3538.4	2291

ولدينا

$$\sum y^2 = 595038.38, \sum xy = 351944.8 \sum x^2 = 210085$$

والمطلوب تحليل هذا البيان الإحصائي بطريقة تحليل تمام التشتت .

الفصل الخامس عشر
الإحصاء الغيروسيطي

١٥ ـ ١ مقدمة : فرضنا في الفصول السابقة أن للمتحولات العشوائية المدروسة توزيعاً إحتمالياً محدد الشكل . وقد انطلقنا في معظم الأحيان أن هذا التوزيع الطبيعي ، مستندين في ذلك إلى ما تقدمه نظرية النهاية المركزية من آفاق عملية واسعة النطاق . وقمنا بتقدير متوسطات وتشتتات وإختبار فرضيات إحصائية حولها . وقد برزت محاولات لإيجاد إحصاءات إختبار تسمح لنا بمقارنة التوزيعات دون معرفة شكل هذه التوزيعات . واتسع نطاق مثل هذه الدراسات حتى أصبحت تشكل اليوم جزءاً لا يمكن إغفاله من الإحصاء النظري ، له تطبيقاته المفيدة في عدد من الحقول . وبإعتبار أن المقارنة في هذه الحالات تجري بين توزيعات ، وليس بين الوسطاء التي تتضمنها المعادلات الرياضية لهذه التوزيعات ، فقد دُعي هذا النوع من الدراسات الإحصائية بالإحصاء غير الوسيطي . وربما كانت أهم تطبيقات الإحصاء الغيروسيطي وأوسعها إنتشاراً تلك المتعلقة بإختبار x^2 من أجل الإستقلال وجودة التلاؤم مما سنستعرضه في الفصل القادم . وفي هذا الفصل نعرض بعض التطبيقات الأخرى التي ذاع إستخدامها في حقول تطبيقية معينة :

١٥ ـ ٢ إختبار الإشارة : غالباً ما نرغب في التحريات التجريبية بمقارنة مادتين أو معالجتين تحت مجموعات مختلفة من الشروط التجريبية . ونحصل على أزواج من الملاحظات ، (واحدة من أجل كل مادة أو معالجة) زوج من أجل كل مجموعة من الشروط . وعلى سبيل المثال في مقارنة نوعين من

الذرة الصفراء A و B من حيث إنتاجيتها ، قد نحصل على نتائج قليلة من كل من مجموعة من التجارب التي تمت تحت شروط تجريبية متباينة . فقد تكون مثل هذه التجارب قد تمت فوق أنواع مختلفة من التربة ، مع أسمدة مختلفة ، وفي سنين مختلفة بما يترتب على ذلك من إختلافات في التأثيرات الفصلية مثل معدل هطول المطر ، درجة الحرارة ، مقدار التعرض لأشعة الشمس ، الخ ونفرض أن كلا من النوعين A و B يظهران معاً بنفس التواتر ضمن كل زمرة من زمر كل تجربة من التجارب ، بحيث تقع الملاحظات المأخوذة على مقدار الإنتاج في أزواج (رقم إنتاج من أجل كل نوع) تم الحصول عليها تحت شروط متشابهة تماماً .

ويوضح هذا المثال الظروف التي يكون إختبار الإشارة تحتها مفيداً وهي :

١ ـ توجد أزواج من الملاحظات على شيئين نريد مقارنتهما .
٢ ـ يتم الحصول على كل زوج من هذه الأزواج تحت شروط متشابهة .
٣ ـ يتم الحصول على الأزواج المختلفة تحت شروط مختلفة .

وهذا الشرط الأخير هو الذي يجعل الإختبار t غير مشروع بإعتباره يعني أن للفروق المختلفة ، مأخوذة ضمن كل زوج ، تشتتات مختلفة ، وإذا لم يكن الحال كذلك (بمعنى أنه إذا كانت الأزواج من الملاحظات متجانسة) ، فيمكن إستخدام الإختبار t ما لم توجد أسباب أخرى تمنع من ذلك ، مثل أن يكون من الواضح تماماً أن التوزيع بعيد عن كونه توزيعاً طبيعياً .

ويمكن اللجؤ إلى إختبار الإشارة حتى عندما يكون الإختبار t ممكناً ، وذلك نظراً لبساطته الشديدة . فالمطلوب هو تعداد الفروق السالبة والموجبة ، ثم العودة إلى جدول جاهز للقيم الهامة (حدود منطقة الرفض) . أي أنه يمكن إختبار الفرضية بإستخدام إختبار الإشارة دون الحاجة إلى أية حسابات .

وتجدر الإشارة إلى أن تطبيق الطريقة التي سنستعرضها في هذه الفقرة يبقى مقصوراً على حالات لا توجد فيها قيمتان متساويتان للفروق . ولا يقع مثل هذا التكرار عملياً عندما تكون القياسات دقيقة جداً ، ولكن ما يسبب حدوثها هو حاجتنا ، في الغالب ، إلى تدوير الرقم العشري الثاني أو الأول ، مثلاً ، وفي هذه الحالة يجب إستثناء ما قد نحصل عليه من القيم المتكررة .

وأخيراً نفترض بأن الفروق بين الأزواج مستقلة عن بعضها البعض ، أي أن نتيجة أي من الأزواج لا تتأثر مطلقاً بنتيجـة أي من الأزواج الباقية .

طريقة العمل : ليكن المطلوب هو مقارنة الماديتن أو المعالجتين A و B ولنرمز بِـ x و y لقيم الملاحظتين المأخوذتين على A و B . وليكن N عدد الأزواج من الملاحظات المأخوذة . فيمكن أن نكتب أزواج الملاحظات والفروق بينها على الشكل التالي :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$$

و

$$x_1-y_1, x_2-y_2, \ldots, x_N-y_N$$

ويعتمد إختبار الإشارة على إشارات هذه الفروق . وسنرمز بِـ r لعدد الإشارات من النوع الأقل تكراراً ، وإذا كانت قيم بعض هذه الفروق صفراً فنستغني عنها وبالتالي نخفض حجم العينة N .

وكمثال عددي نأخذ البيان الإحصائي في الجدول (١٥ ـ ١) الذي يعطي إنتاج سلالتين من الذرة الصفراء حصلنا عليه من عدة تجارب مختلفة . وفي هذا المثال ، لدينا $N = 28$ و $r = 7$

والفرضية الإبتدائية التي سنختبرها هي أن لكل من هذه الفروق الثمانية والعشرين توزيعاً إحتمالياً (وليس من الضروري أن تكون هذه التوزيعات

من نفس الشكل) وسطه يساوى الصفر. (الوسط كما عرفناه في الفصول الأولى هو القيمة التي يكون إحتمال تجاوزها مساوياً النصف، أو بعبارة أخرى يكون إحتمال أن يأخذ المتحول العشوائي قيمة أكبر من الوسط مساوياً لإحتمال أن يأخذ قيمة أصغر من الوسط وكل من الإحتمالين يساوي النصف) وستكون هذه الفرضية صحيحة، على سبيل المثال، عندما يكون توزيع كل فرق من هذه الفروق متناظراً حول الصفر، هذا مع العلم بأن صفة التناظر ليست أمراً ضرورياً، أي أن كون الفرضية صحيحة لا يعني بالضرورة أن التناظر موجود. وسنرفض هذه الفرضية الإبتدائية عندما يكون الفرق بين عدد الإشارات الموجبة وعدد الإشارات السالبة كبيراً. ولكن ما هي القيمة الحرجة التي نعتبر مثل هذا الفرق عندها كبيراً بكفاية، أي نعتبره فرقاً هاماً؟ وللإجابة على هذا التساؤل نعود إلى الجدول الموافق في الملحق الذي يعطي القيم الحرجة لِـ r، وذلك عند مستويات من الأهمية تساوي 1% ، 5% ، 10% و 25%. ونعتبر قيمة r هامة إذا كانت أقل من القيمة المبينة في الجدول أو تساويها، وذلك عند مستوى الأهمية الذي تبنيناه.

ويعطي الجدول ٧ النسب المئوية الموافقة للتوزيع الإحتمالي لعدد الإشارات الموجبة، وذلك تحت الشرط بأن الفرضية الإبتدائية صحيحة. وهذا التوزيع هو في الحقيقة التوزيع الثنائي مع $p = \frac{1}{2}$. وبصورة عامة لا توجد قيم لِـ r موافقة تماماً لمستويات الأهمية المعتادة، مثل $\alpha = .05$ أو $\alpha = .01$. وعلى أي حال فإنه يمكننا إيجاد مستويات أهمية قريبة إلى أي مستوى مرغوب إذا كان حجم العينة كبيرا بكفاية. ومن أجل المثال المعطى في الجدول (١٥ ـ ١) حيث N = 28، نجد من الجدول ٧ الموافق في الملحق أنه يمكن القيام بإختبار وحيد الجانب للفرضية القائلة بأن المجتمع يتألف من 50% على الأقل من الإشارات الموجبة. وهذا الإختبار هو أن نرفض الفرضية إذا حصلنا على 9 إشارات موجبة أو أقل في العينة التي يقدمها البيان الإحصائي وبصورة مماثلة يمكن، عند المستوى

$\alpha = .044$. القيام بإختبار وحيد الجانب للفرضية بأن المجتمع يتألف من 50% على الأكثر من الإشارت الموجبة وذلك برفض الفرضية إذا حصلنا من العينة على 9 إشارات سالبة أو أقل (أي أكثر من 18 إشارة موجبة). ويمكن القيام بإختبار ثنائي الجانب عند المستوى $\alpha = 2\,(.044) = .088$ ، وذلك برفض الفرضية إذا لاحظنا في العينة ما لا يزيد عن 9 إشارات موجبة أو ما لا يزيد 9 إشارات سالبة. وهذا الإختبار يحدد منطقة الرفض بانها المنطقة الموافقة لقيم r التي لا تتجاوز 9 أي $r \leqslant 9$. وإذا استخدمنا البيان الإحصائي في الجدول (١٥ ـ ١) لإختبار الفرضية الثنائية الجانب عند المستوى $\alpha = .088$ ، فإننا سنرفض الفرضية بإعتبار أن لدينا $r = 7$ إشارات موجبة فقط.

وغالباً ما يستحيل علينا إيجاد منطقة رفض بحجم معين من أجل عينات صغيرة الحجم. وعلى سبيل المثال نجد من الجدول أنه إذا رغبنا القيام بإختبار ثنائي الجانب عند المستوى $\alpha = .10$ ، مستخدمين $N = 12$ ملاحظة ، فإن أقرب إختيار ممكن هو $\alpha = 2\,(.019) = .038$ (نرفض إذا كان $r \leqslant 2$) و $\alpha = 2(.073) = .146$ (نرفض إذا كان $r \leqslant 3$). وحتى إذا كانت الفرضية بأن المجتمع يحوي 50% من الإشارات السالبة و 50% من الإشارات الموجبة هي فرضية صحيحة فإن إحتمال أن تكون كل الإشارات في عينة حجمها $N=4$ ، أو حتى في عينة حجمها $N=5$ ، من نفس النوع سيزيد عن 5% . فإحتمال كون الإشارات الأربع في عينة حجمها 4 متماثلة هو .125 ، وإحتمال كون الإشارات الخمس في عينة حجمها 5 متماثلة هو .0625 وذلك تحت الشرط بأن الفرضية صحيحة (أي $p = \frac{1}{2}$). ولذلك فإنه لا بد من عينة تحوي على الأقل ستة أزواج حتى يكون ممكناً لِـ r أن تفترض أي قيمة تؤدي إلى رفض الفرضية عند المستوى $\alpha = .05$.

قوة الإختبار وحجم العينة : كما رأينا في الإختبارات الإحصائية السابقة فإن قوة إختبار الإشارة أي قدرته على فرز فرضية خاطئة ورفضها تزداد مع

جدول ١٥ ـ ١ انتاج سلالتين من الذرة الصفراء

رقم التجربة	انتاج السلالة		اشارة الفرق	رقم التجربة	انتاج السلالة		اشارة الفرق
	A	B	y–x		A	B	y–x
1	47.8	46.1	+	4	40.8	41.3	–
	48.6	50.1	–		39.8	40.8	–
	47.6	48.2	–		42.2	42.0	+
	43.0	48.6	–		41.4	42.5	–
	42.1	43.4	–				
	41.0	42.9	–	5	38.9	39.1	–
					39.0	39.4	–
2	28.9	38.6	–		37.5	37.3	+
	29.0	31.1	–				
	27.4	28.0	–	6	36.8	37.5	–
	28.1	27.5	+		35.9	37.3	–
	28.0	28.7	–		33.6	34.0	–
	28.3	28.8	–				
	26.4	26.3	+	7	39.2	40.1	–
	26.8	26.1	+		39.1	42.6	–
3	33.3	32.4	+				
	30.6	31.7	–				

إزدياد حجم العينة . ويمكن إعطاء احتمالات رفض فرضية ابتدائية H_0 من أجل فرضيات بديلة H_1 تحدد قيمة ما لِـ p نسبة الإشارات الموجبة في المجتمع و $1-p$ نسبة الإشارات السالبة فيه . وحيث تحدد الفرضية الإبتدائية H_0 أن نسبة 50% من الإشارات موجبة $(p=.50)$ ونسبة 50% منها سالبة . ويقدم الجدول (١٥ ـ ٢) الحد الأدنى لحجم العينة بحيث لا يقل إحتمال رفض الفرضية H_0 عن .95 ، وذلك عندما تكون القيمة الفعلية لِـ p هي القيمة المعطاة في العمود الأيسر .

جدول ١٥ ـ ٢ الحد الأدنى الضروري لقيمة N حتى لا يقلّ إحتمال رفض الفرضية $H_0: p=.50$ عن .95 في الوقت الذي تأخذ فيه p قيماً فعلية متباينة في إنحرافها عن القيمة المفترضة ، وذلك من أجل مستويات أهمية مختلفة .

	N			
p	$\alpha = 1\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 25\%$
.45	1777	1297	1080	780
.40	442	327	267	193
.35	193	143	118	86
.30	106	79	67	47
.25	66	49	42	32
.20	44	35	28	21
.15	32	23	18	14
.10	24	17	13	11
.05	15	12	11	6

فعلى سبيل المثال ، يبين الجدول (١٥ ـ ٢) أنه إذا كانت الإشارات تتوزع فعلاً بنسبة 45:55 فلا بد من أخذ عينة تحوي 1080 زوجاً لكي يكون إحتمال رفض الفرضية 95 . عند المستوى $\alpha = .10$. أي أنه إذا سحبنا عينات متتالية حجم كل منها 1080 من المجتمع الذي يتصف فعلاً بأن الإشارات

فيه تتوزع بنسبة 45:55 ، فإننا نتوقع أن تؤدي 95% من هذه العينات إلى رفض الفرضية بأن الإشارات تتوزع بنسبة 50:50 (وذلك عند مستوى الأهمية α=.10) .

وبالطبع فإننا لا نحتاج إلى أي إختبار إذا كنا نعلم سلفاً أن الإشارات تتوزع بنسبة 45:55 . ولكن أهمية الجدول (١٥ ـ ٢) تنبع من الإعتبارات التالية : يهمنا عند مقارنة مادتين أن نحدد ما إذا كان لهما نفس القيمة أو أنهما مختلفتان . وقبل بدء التجربة يجب أن نقرر المدى الذي يجب ألا تنقص عنه قيمة الفرق حتى نصنف المادتين على أنهما مختلفتان أو بعبارة أخرى ما هو مدى الفرق الذي يمكن التساهل فيه عندما نقول العبارة التالية : « المادتان لهما تقريباً نفس القيمة بحيث يمكن إعتبارهما عملياً متساويتين » . ومثل هذا القرار ، بالإضافة إلى الجدول (١٥ ـ ٢) ، يسمح لنا بتحديد حجم العينة المطلوب . وإذا كنا نهتم بكشف إنحرافات عن الفرضية الإبتدائية صغيرة بحيث يكون التوزع الفعلي للإشارات في حدود 45:55 ، فيجب أن نكون مستعدين لأخذ عينة حجمها كبير جداً (بين 780 و 1777 حسب مستوى الأهمية α) . أما إذا كان إهتمامنا (وهذا يرجع إلى طبيعة المسألة المدروسة) لا يتعدى كشف إنحرافات في حدود توزيع فعلي للإشارات 30:70 ، فإن عينة أصغر بكثير ستكون كافية (بين 47 و 106 وفقاً لمستوى الأهمية α) .

تعديلات إختبار الإشارة : إذا كانت الأزواج من الملاحظات مقاسة بنفس وحدات القياس (أي أنه يمكن مقارنتها ببعضها) ، فيمكن إستخدام إختبار الإشارة للإجابة على تساؤلات من النوع التالي :

١ ـ هل المادة A أحسن من المادة B بمقدار P بالمائة ؟

٢ ـ هل المادة A أحسن من المادة B بمقدار Q من الوحدات ؟

ويمكن إختبار السؤال الأول بزيادة قياسات B بنسبة P في المائة ومقارنة

النتائج مع قياسات A . فإذا فرضنا مثلاً أن أزواج الملاحظات هي :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_N, y_N)$$

وأننا نريد إختبار الفرضية بأن قياسات x المتعلقة بِـ A أعلى بمقدار 5% من القياسات y المتعلقة بِـ B. فعندئذ يمكن تطبيق إختبار الإشارة على إشارات الفروق التالية :

$$x_1 - 1.05y_1 \,,\, x_2 - 1.05y_2 \,,\, x_3 - 1.05y_3 \,, \ldots,\, x_N - 1.05y_N.$$

ومن أجل السؤال الثاني يمكن تطبيق إختبار الإشارة معتبرين إشارات الفروق :

$$x_1 - (y_1 + Q), x_2 - (y_2 + Q), x_3 - (y_3 + Q), \ldots, x_N - (y_N + Q)$$

وفي كلي الحالتين ، إذا لم يكن التوزيع الناتج للإشارات (كما تشير إليه العينة) مختلفاً إختلافاً هاماً عن 50:50 ، نقول أن البيان الإحصائي يشير إلى أنه يمكن الإجابة على التساؤل بالإيجاب . ويوجد عادة مدى معين من قيم P (أو Q) التي تؤدي إلى توزيعات غير هامة (أي توزيع للإشارات غير مختلف إختلافاً هاماً عن 50:50) . فإذا حددنا مثل هذا المدى ، مستخدمين مستوى من الأهمية $\alpha = .05$ ، فإن مثل هذا المدى هو في الواقع 95% مجال ثقة من أجل P (أو Q) .

وإذا لم تكن وحدات القياس هي نفسها من أجل جميع أزواج الملاحظات ، فيمكن القيام بالتغييرات الضرورية في سلالم القياس بحيث تصبح مثل هذه التساؤلات ذات معنى .

وعندما تكون الملاحظات قادمة من مجتمع طبيعي ، يمكننا مقارنة فعالية إختبار الإشارة بالنسبة للإختبار t ، وذلك بإيجاد حجم العينة N_t الذي تكون

قوة الإختبار t من أجله مساوية لقوة اختبار إشارة قائم على عينة حجمها N . والنسبة $100 N_t/N$ تدعى فعالية إختبار الإشارة (من حيث قوته) بالنسبة للإختبار t . وتتناقص فعالية إختبار الإشارة هذه مع (١) زيادة α ، (٢) زيادة حجم العينة ، و(٣) زيادة الفرق بين متوسطي المجتمعين. ويبين الجدول (١٥ ـ ٣) فعالية إختبار الإشارة عند إستخدامه في حالة مجتمعين طبيعيين بمتوسطين μ_1 و μ_2 ونفس التشتت σ^2 . والكمية δ في الجدول هي حاصل قسمة الفرق بين المتوسطين (بالقيمة المطلقة) على الإنحراف المعياري للفرق بين ملاحظتين أي : $\delta = |\mu_1 - \mu_2| / \sigma\sqrt{2}$

جدول ١٥ ـ ٣ فعالية إختبار الإشارة في حالة مجتمعين طبيعيين .

N	α	δ				
		قرب الصفر	.5	1.0	1.5	2.0
5	.0625	96	96	95	93	91
10	.0020	94	92	90	87	84
10	.0215	85	84	82	80	77
10	.1094	77	76	74	72	
20	.0118	76	75	73	70	
20	.0414	73	72	70	68	
20	.1153	70	69	67	65	
∞	α	63.7				

ونرى من هذا الجدول ، مثلاً ، أن لإختبار الإشارة المستخدم في عينة حجمها $N = 20$ عند المستوى $\alpha = .0414$ نفس قوة الإختبار t المستخدم في عينة حجمها $N_t = .70 N = 14$. وإذا كان $|\mu_1 - \mu_2| / \sigma\sqrt{2}$ صغيراً و N كبيراً فإن الإختبار t لا يحتاج إلا إلى 64% تقريباً من عدد الملاحظات ليكون له نفس قوة إختبار الإشارة .

١٥ ـ ٢ **إختبار الرتب المؤشرة** (إختبار ويلكوكسن) : يعتبر إختبار

ويلكوكسن تعديلاً لإختبار الإشارة. ويُستخدم لإختبار الفرضية بأن وسط مجموعة من الملاحظات (أو وسط الفروق بين أزواج من الملاحظات) يساوي قيمة محدودة μ_0، مثلاً. ونحسب إحصاء الإختبار T كما يلي :

١ ـ نطرح μ_0 من كل ملاحظة.
٢ ـ نرتب الفروق الناتجة وفقاً لقيمها المطلقة من الأصغر إلى الأكبر.
٣ ـ نضع أمام كل رتبة إشارة الفرق الموافق لهذه الرتبة.
٤ ـ نحسب T مجموع الرتب الموجبة.

ويقدم الجدول ٨ الموافق في الملحق النسب المئوية لتوزيع إحصاء الإختبار T.

ونجد في الجدول (١٥ ـ ٤) مثالاً عددياً لتوضيح إستخدام الإحصاء T من أجل اختبار الفرضية بأن وسط المجتمع المدروس هو $\mu_0 = 2$. وقد اخترنا عينة عشوائية من ثماني ملاحظات من هذا المجتمع. ونرى من الجدول ٨ الموافق في الملحق أنه لكي يكون مستوى الأهمية قريب من $\alpha = .05$، يمكن أن نستخدم المنطقة الحرجة (أو منطقة الرفض) المحدودة بقيم لِـ T أقل من أو تساوي 4، وقيم لِـ T أكبر من أو تساوي 32. ومستوى الأهمية الموافق لهذه المنطقة الحرجة يساوي تماماً $\alpha = 2\,(.027) = .054$. وبما أن $T = 30$ في مثالنا هنا فإن البيان الإحصائي المعطى في الجدول (١٥ ـ ٤) لا يقدم عند المستوى 054. دلالة كافية على أن الفرضية غير صحيحة.

جدول ١٥ ـ ٤ مثال لتوضيح استخدام اختبار ويلكوكسن

x	$x - \mu_0$	رتبة $/x - \mu_0/$	الرتب المؤشرة
2.55	.55	3	3
4.62	2.62	8	8
2.93	.93	4	4
2.46	.46	2	2
1.95	–.05	1	–1
4.55	2.55	7	7
3.11	1.11	6	6
0.90	–1.10	5	–5
			30 = T

١٥ ـ ٣ الأشواط : في الفقرات السابقة قارنا ، فيما يتعلق بإختبار الإشارة ، العدد الكلي للفروق الموجبة بالعدد الكلي للفروق السالبة . ومن الطبيعي أن نتساءل عما إذا كانت الإشارات الموجبة مبعثرة بين الإشارات السالبة بطريقة عشوائية إلى حد ما ، وذلك عندما نكتب الملاحظات وفقاً للترتيب الزمني الذي لوحظت فيه . وإذا لاحظنا ، على سبيل المثال ، المتتابعة التالية من الإشارات –,–,–,–,,–,+,+,+,+ فيمكن أن نجد فيها ما يميزها عن المتتابعة –,+,–,+,–,+,–,+,–. فمع أن كلاً منهما يحوي أربع إشارات موجبة وخمس إشارات سالبة ، إلا أن جميع الإشارات الموجبة تقع إلى جانب بعضها البعض في المتتابعة الأولى . وسنسمي كل مجموعة من الفروق لها نفس الإشارة وتقع إلى جانب بعضها « شوطاً » . ويمكن أن يحوي الشوط أي عدد ممكن من الإشارات ، وهكذا فإن المتتابعة –,+,+,+,– تحوي ثلاثة أشواط ، اثنان يحوي كل منهما إشارة سالبة واحدة ، والشوط الباقي يحوي ثلاث إشارات موجبة . أما المتتابعة –,–,–,–,–,+,+,+,+ . ففيها شوطان طول أحدهما أربعة وطول الآخر خمسة . ويمكن لمتتابعة تحوي n فرقاً أن تتألف من شوط واحد (كل الإشارات موجبة أو كلها سالبة)

ويمكن أن تتألف من n شوطاً إذا كانت الإشارتان تظهران على التناوب . وسيكون من المنطقي أن نرفض الفرضية بأن ترتيب الإشارات الموجبة والسالبة هو ترتيب عشوائي ، في حال وجود عدد كبير أو عدد صغير من الأشواط .

ويمكن الإستفادة من الأشواط لإختبار ما إذا كانت عينتان عشوائيتان قادمتين من مجتمعين لهما نفس التوزيع التكراري . ومن أجل ذلك نرتب ملاحظات العينتين معاً في متتابعة واحدة ، ومن الأصغر إلى الأكبر . ثم نحصي عدد أشواط الملاحظات من كل من العينتين ، فإذا وجدنا أن هذا العدد أقل مما نتوقع حدوثه بفعل المصادفة ، فيما لو كان المجتمعان متطابقين ، فإننا نرفض عندئذ الفرضية بأن للمجتمعين نفس التوزيع .

ويمكن أن نستخدم أيضاً نظرية الأشواط لإختبار الفرضية بأن الملاحظات مسحوبة عشوائياً من مجتمع واحد . وللقيام بذلك نحسب وسط العينة المسحوبة ، ونرمز للملاحظات الأقل من الوسط بإشارة (−) ، وللملاحظات فوق الوسط بإشارة (+) ، فإذا كان عدد الأشواط الموجبة والسالبة أكبر أو أصغر مما يمكن توقعه بفعل المصادفة ، فإننا نرفض الفرضية .

ليكن N_1 عدد الوقوعات من نفس النوع (فروق من إشارة موجبة ، ملاحظات أقل من الوسط ، الخ) . و N_2 عدد الوقوعات من النوع الآخر (فروق سالبة ، ملاحظات أكبر من الوسط ، الخ .) وليكن u العدد الكلي للأشواط بين الـ $(N_1 + N_2)$ من الملاحظات . فالجدول ٩ الموافق في الملحق يعطي التوزيع لِـ u من أجل قيم لِـ N_1 و N_2 أقل من أو تساوي العشرة ، وعدد من النسب المئوية الهامة للتوزيعات ، من أجل عينات من حجم أكبر .

مثال١ : لنفرض أن طريقة صناعية تنتج قضباناً فولاذية وأننا نقيس قطر كل منها . وقد وجدنا بين القضبان الأربعين الأولى ستة عشر شوطاً ، يتجاوز الوسط أو يقل عنه . ولنختبر الفرضية بأن هذه الطريقة الصناعية تنتج قضباناً تختلف أقطارها بصورة عشوائية . ولدينا هنا حكماً $N_1 = N_2 = 20$

(بإعتبار أنه لا بد أن يكون نصف الملاحظات فوق الوسط والنصف الآخر تحت الوسط وذلك وفقاً لتعريف الوسط) . وعدد الأشواط الملحوظة $u = 16$ يقع بين $u_{.025} = 14$ و $u_{.975} = 27$ ولذلك فإنه لا توجد دلالة كافية لرفض الفرضية عند المستوى $\alpha = .05$

مثال ٢ : لنفرض أننا عالجنا 10 وحدات حقلية من القمح بالسماد A ، وعشر وحدات أخرى بالسماد B ، وسجلنا الإنتاج في الجدول التالي :

A	26.3	28.6	25.4	29.2	27.6	25.6	26.4	27.7	28.2	29.0
B	28.5	30.0	28.8	25.3	28.4	26.5	27.2	29.3	26.2	27.5

وبترتيب العينتين معاً من الأصغر إلى الأكبر ، ووضع خطوط تحت ملاحظات العينة A تمييزاً لها عن ملاحظات العينة B نجد :

25.3, $\underline{25.4}$, $\underline{25.6}$, 26.2, $\underline{26.3}$, $\underline{26.4}$, 26.5, 27.2, 27.5, $\underline{27.6}$, $\underline{27.7}$, $\underline{28.2}$, 28.4, 28.5, $\underline{28.6}$, 28.8, $\underline{29.0}$, $\underline{29.2}$, 29.3, 30.0

ويوجد 11 شوطاً توافق ، من أجل $N_1 = N_2 = 10$ ، النسبة المئوية 58.6 من توزيع u . وبما أن هذه النسبة تقع بين 2.5 و 97.5 ، فلا توجد دلالة كافية عند مستوى الأهمية 5% لرفض الفرضية بأن للمجتمعين نفس التوزيع . وبالطبع فإنه من غير المتوقع أن يهتم أي كان برفض الفرضية بأنه لا يوجد فرق بين السمادين إذا كان هناك عدد كبير من الأشواط . ويشير العدد الكبير من الأشواط في مثل هذه الحالة إلى نقص في عشوائية إختيار العينة . ولذلك يمكننا في هذا المثال إستخدام إختبار وحيد الجانب ، فنرفض الفرضية فقط إذا كانت النسبة المئوية الموافقة للقيمة الملحوظة لِـ u أقل من .05 ، أي إذا كانت قيمة u أقل أو تساوي 6 .

التقريب الطبيعي : إذا كان كل من N_1 و N_2 أكبر من 10 ، فيمكن

تقريب تابع التوزيع لِـ u بإستخدام جداول التوزيع الطبيعي حيث :

$$z = \frac{u - \mu_u + \frac{1}{2}}{\sigma_u}$$

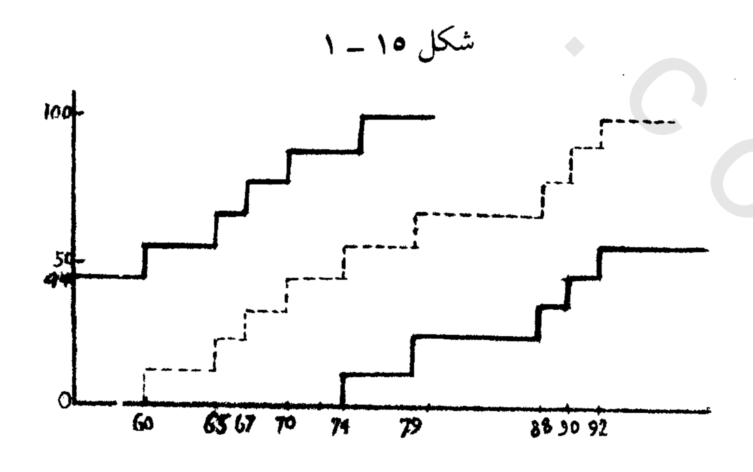
$$\mu_u = \frac{2 N_1 N_2}{N_1 + N_2} + 1, \quad \sigma_u^2 = \frac{2 N_1 N_2 (2 N_1 N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1 + N_2)^2 (N_1 + N_2 - 1)}$$

وفي المثال ٢ أعلاه لدينا $N_1 = N_2 = 10$ ، $\mu_u = 11$ ؛ $\sigma_u = \sqrt{4.73} = 2.17$
والقيمة الملحوظة لِـ u ، وهي 11 ،تعطي $z = .5/2.17 = .23$ ، ويوافق هذه القيمة لِـ z النسبة المئوية 59 تقريباً .

١٥ ـ ٤ **تقدير تابع توزيع** : يمكن إقامة مجال ثقة نتنبأ من خلاله بمدى قرب المضلع التكراري المتجمع لعينة من تابع التوزيع الموافق للمجتمع الذي سحبنا منه العينة . ونلخص الطريقة فيما يلي :

نرسم المضلع التكراري المتجمع لملاحظات العينة (الخط المنقط في الشكل (١٥ ـ ١)) . ثم نرسم مضلعين موازيين على مسافة $100d_\alpha$ فوق وتحت المضلع التكراري للعينة . فنحصل بذلك على شريط عرضه $200\, d_\alpha$. وهو يمثل $(1-\alpha)$ مجال ثقة للعبارة « تابع توزيع المجتمع يقع ضمن هذا الشريط » .

شكل ١٥ ـ ١



ونقرأ قيم d_α في الجدول الموافق في الملحق . ونجد حجم العينة على يسار الجدول وخمسة مستويات من الثقة في أعلى الجدول . وعلى سبيل المثال ، إذا كان $N = 50$ ورغبنا في أن نكون واثقين ، بإحتمال يساوي .90 ، أن الشريط يغطي تابع التوزيع الموافق للمجتمع ، فعندئذ نجد من الجدول أن $d_{.90} = .17$. أي أن عرض الشريط هو $2(.17) = .34$.

والجدول المذكـور هو في الواقع جدول للنسب المئوية للتوزيع الإحتمالي لأكبر إنحراف للمضلع التكراري المتجمع للعينة عن تابع التوزيع الموافق للمجتمع الذي سحبنا منه العينة . وهكذا نقول أنه في 90 بالمائة من العينات التي حجمها $N = 50$ سيكون أعظم إنحراف للمضلع التكراري المتجمع للعينة عن تابع التوزيع الموافق للمجتمع الذي سحبنا منه العينة هو 0.17

مثال : لنفرض أن ملاحظات عينة حجمها $N = 9$ هي :

88, 92, 65, 74, 67, 79, 90, 70, 60

فنجد من الجدول أن $100\, d_\alpha = 44$ من أجل $1 - \alpha = .95$ و $N = 9$ (بين $N = 5$ و $N = 10$) . ويبين الشكل (١٥ ـ ١) مضلع العينة بخط منقط أما شريط الثقة فهو خط مستمر يبعد فوق وتحت الخط المنقط بمقدار 0.44 . ولدينا %95 ثقة أن تابع توزيع المجتمع يقع ضمن هذا الشريط .

تحديد حجم العينة : ويمكن إستخدام الجدول أيضاً لتحديـد حجـم العينة الضروري كي نحرز %95 من الثقة بأن تابع توزيع المجتمـع يقع ضمن شريط معين . فلنفرض ، على سبيل المثال ، أن أمثال الثقة التي نرغبها هي 95. ، وأن عرض الشريط هو .05 ، فعندئذ يكون $d_\alpha = .05/2$. ولكن d_α كما نجدها من الجدول هي $1.36/\sqrt{N}$ ، ومنه نكتب :

$$(1.36/\sqrt{N}) = .025$$

أو

$$N = (\frac{1.36}{.025})^2 = (54.4)^2 = 2960$$

ومن أجل أمثال ثقة تساوي 99. ، يجب أن يكون حجم العينة :

$$N = (\frac{1.63}{.025})^2 = 4251$$

وبصورة مماثلة ، إذا كان أمثال الثقة 99. ، وعرض الشريط 02. (أي أن يحيد المضلع التكراري المتجمع للعينةعن تابع توزيع المجتمع الذي سحبنا منه العينة بما لا يزيد عن 01.) فعندئذ يكون حجم العينة المطلوب هو :

$$N = (\frac{1.63}{.01})^2 = 26569.$$

ويمكن إستخدام الطريقة المذكورة أعلاه كاختبار لجودة التلاؤم . فإذا وقع منحني تابع التوزيع المفروض بكامله ضمن 95% شريط ثقة نقوم برسمه من أجل العينة المسحوبة ، فإننا نقبل الفرضية بأن المنحني المفروض يمثل تابع التوزيع الموافق للمجتمع ، وذلك عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$. وأما إذا خرج المنحني المفروض عن حدود الشريط في نقطة أو أكثر فإننا نرفض الفرضية .

١٥ ـ ٥ إختبار مجموع الرتب : قمنا في المثال ٢ من الفقرة (١٥ ـ ٣) بتعداد الأشواط بعد ترتيب 20 ملاحظة ، 10 من كل من مجتمعين . ويمكننا إستخدام إحصاء آخر هو مجموع الرتب T' لمقارنة العينتين ، وللقيام بذلك نرتب ملاحظات العينتين وفقاً لحجمها من الأصغر إلى الأكبر ، ويقابل كل ملاحظة رقم هو مرتبتها فالرقم 1 من أجل الملاحظة الأصغر ، والرقم 2 من أجل الملاحظة التي تليها ، وهكذا . وعندئذ يكون الإحصاء T' هو مجموع الرتب الموافقة لملاحظات العينة ذات الحجم الأصغر من بين العينتين المدروستين ، أي العينة التي عدد ملاحظاتها أقل . وإذا كانت العينتان من نفس الحجم يمكن إختيار أي منهما . ونلاحظ أنه إذا كان T' مجموع N_1 رتبة ، في حالة عينتين

حجماهما N_1 و N_2 $(N_1 \leq N_2)$ ، فإن قيمة T' محصورة حكماً بين $1+2+...+N_1 = N_1(N_1+1)/2$ و $N_1(2N_2+N_1+1)/2$.

ويقدم الجدول ١٠ بعض النسب المئوية لتوزيع الإحصاء T' تحت الفرض بأن العينتين مسحوبتان من مجتمعين لهما نفس التوزيع الإحتمالي. ونرفض الفرضية بأن العينتين مسحوبتان من مجتمعين لهما نفس التوزيع إذا كانت قيمة T' كبيرة بصورةهامة ، أو صغيرة بصورة هامة.

وعلى سبيل المثال إذا كان $N_1 = N_2 = 10$. فنرى من الجدول ١٠ أن إحتمال كون T' أصغر من أو يساوي 79 هو .026 ، وأن إحتمال كون T' أكبر من أو يساوي 134 هو 0.026 . وهكذا تشكل قيم T' التي تحقق $T' \leq 79$ أو $T' \geq 134$ منطقة رفض للفرضية عند مستوى الأهمية 5.2% وفي المثال ٢ من الفقرة (١٥ ـ ٣) كانت رتب العينة A هي 2,3,4,5,6,10, 11,12,15,17,18 ومنه نجد أن $T' = 99$ ؛ وبما أن هذه القيمة تقع خارج منطقة الرفض ($T' \leq 79$ أو $T' \geq 134$) ، فإننا نقبل ، عند المستوى 5.2 ، الفرضية بأن للمجتمعين اللذين سحبنا منهما العينتين A و B نفس التوزيع الإحتمالي.

التقريب الطبيعي : إذا كان كل من N_1 و N_2 أكبر من عشرة ، فيمكن أن نقول ، بصورة تقريبية ، أن توزيع الإحصاء T' هو التوزيع الطبيعي بمتوسط.

$$\mu_{T'} = \frac{N_1(N_1+N_2+1)}{2} \qquad \sigma^2_{T'} = \frac{N_1 N_2 (N_1+N_2+1)}{12}$$

ونستخدم عامل التصحيح من أجل الإنقطاع وهو $\frac{1}{2}$ عند حساب قيمة المتحول المعياري الموافق لِـ $T'_\circ$ ، فنكتب $z = (T'_\circ - \mu_{T'_\circ} + \frac{1}{2}) / \sigma_{T'_\circ}$.
ونعود بقيمة z هذه إلى جدول التوزيع الطبيعي وفي المثال المذكور أعلاه حيث $N_1 = N_2 = 10$ نجد $\mu_{T'} = 105$ و $\sigma_{T'} = \sqrt{175} = 13.2$ ، و $T'_\circ$ أي القيمة الملحوظة لِـ T' هي $T'_\circ = 99$ ،ومنه $Z = -5.5/13.2 = -.42$. وبمقارنتها مع حدود منطقة الرفض عند المستوى $\alpha = .05$ ، وهي $Z_{.025} = -1.96$ و $Z_{.975} = 1.96$ ، نرى أنها تقع خارج منطقة الرفض. وبالتالي فإنه لا توجد دلالة كافية لرفض الفرضية بأن العينتين مسحوبتان من مجتمعين لهما نفس التوزيع .
وبما أن توزيع T' معروف بدقة من أجل $N_1 = N_2 = 10$ ، فيمكن مقارنة التقريب الطبيعي بالقيمة الناتجة من جدول التوزيع الدقيق لِـ T' . ونجد من هذا الجدول أن إحتمال كون T' أصغر أو يساوي 99 هو .342 ، بينما نقرأ من الجدول الطبيعي أن الإحتمال الموافق لِـ $Z = -.42$ هو 0.337 . أو إذا جربنا قيمة أخرى افتراضية ولتكن $T'_\circ = 79$ ، مثلاً ، فإن قيمة Z الموافقة هي : $Z = \frac{79 - 105 + \frac{1}{2}}{13.2} = 1.93$ ، ويقابلها إحتمال 027 . بالمقارنة مع الإحتمال محسوباً دون اللجؤ إلى التقريب الطبيعي وهو 0.026 .

ويتطلب إختبار مجموع الرتب حوالي 5% زيادة من الملاحظات عما يتطلبه الإختبار t . من أجل مقارنة متوسطي مجتمعين طبيعيين ، وذلك لكي يكون للاختبارين نفس القوة . ونلاحظ بالطبع أنه يمكن تطبيق إختبار مجموع الرتب سواء كان المجتمعان طبيعيين أم لا .

إختبار مجموع الرتب من أجل عدة عينات : يمكن إستخدام الرتب لإختبار الفرضية بأن k من العينات أحجامها على الترتيب $n_1, n_2, \ldots, n_k$ مسحوبة من k من المجتمعات التي لها نفس التوزيع الإحتمالي . وللقيام بذلك نرتب جملة الملاحظات الموجودة في جميع العينات المدروسة وعددها $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$

وفقاً لحجمها أي من الأصغر إلى الأكبر . ثم نضع أمام كل ملاحظة رقماً يمثل رتبتها ، وذلك كما رأينا في حالة عينتين. وليكن R_i مجموع الرتب الموافقة لملاحظات العينة i ، $(i = 1,...,k)$. ولنحسب الإحصاء :

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1)$$

وإذا كانت الفرضية صحيحة ، وقيم $n_1 n_2,...,n_k$ غير صغيرة ، فيمكننا القول بأن الإحصاء H يتوزع تقريباً وفق التوزيع χ^2 بـ $(k-1)$ درجة من الحرية . وعملياً إذا كانت جميع قيم n_i $(i = 1,2,...,k)$ أكبر من 5 فإن النسب المئوية 95 و 99 في الجدول تكون دقيقة إلى حدّ مرض عملياً . ونرفض الفرضية عند المستوى α إذا كانت قيمة الإحصاء H أكبر من $\chi^2_{1-\alpha}$ $(k-1)$. أما القيم المكررة ، في حال وجودها ، فنعالجها بنفس الطريقة المذكورة سابقاً .

تمارين

١ ـ في صناعة (جير) السيارة حصلنا على البيان الإحصائي التالي ، الذي يعطي عدد القطع النا قصة الصنع من الإنتاج اليومي البالغ 100 قطعة . فهل عدد الأشواط فوق وتحت الوسط هام عند المستوى 5% ؟

22	25	15	26	31	22	17	26
23	20	28	32	43	18	16	36
21	16	29	26	18	24	28	42
17	14	26	33	26	24	32	36
38	26	25	30	21	16	18	34

٢ ـ إستخدم إختبار الإشارة لتحليل البيان الإحصائي التالي ، الذي يعطي ما تكسبه عشر أزواج من الفئران ، تلقى نصفها البروتين من فستق نيء ، بينما تلقى النصف الآخر البروتين من فستق محمّص . والمطلوب إختبار ما إذا كان لتحميص الفستق أي أثر على محتوياته من البروتين . قارن النتائج مع تلك التي تحصل عليها من إستخدام الإختبار t وأوضح الفرق بين الطريقتين .

نيء	61	60	56	63	56	63	59	56	44	61
محمص	55	54	47	59	51	61	57	54	62	52

٣ ـ وجدنا ترتيب النباتات الصحيحة والمريضة في صف من نباتات الفراولة على الشكل التالي :

HHDHHHHHDHDDDHHHHHHHHHH

فهل يلقي هذا الترتيب شكاً على كون النباتات المريضة مبعثرة بصورة عشوائية بين النباتات الصحيحة ؟

٤ ـ يدعي خبير في تذوّق الشاي أنه قادر على التمييز بين نوعين من الشاي من خلال تذوقه لكأس مصنوع من كل منهما . وفي تجربة تحوي 20 محاولة

إستطاع ، في أربعة عشر منها ، أن يميز بصورة صحيحة بين النوعين ، وكان ذلك وفقاً للترتيب التالي :

$$+ + - - + + + + + + - - - + + + + + + -$$

حيث ترمز + للحكم الصحيح . حلل هذه النتائج بإستخدام إختبار الإشارة ، وأيضاً بإستخدام الأشواط .

٥ ـ حلل البيان الإحصائي في التمرين (٢) بإستخدام إختبار الرتب المؤشرة .

٦ ـ قسمنا 20 من العجول ، عشوائياً ، إلى اربع حظائر متماثلة في كل منها خمسة عجول . وقدمنا في كل حظيرة نظام تغذية مختلف ، ولفترة محددة ، ثم قسنا زيادة وزن كل عجل فحصلنا على الجدول التالي :

الطعام A	الطعام B	الطعام C	الطعام D
133	163	210	195
144	148	233	184
135	152	220	199
149	146	226	187
143	157	229	193

والمطلوب تحليل هذا البيان الإحصائي مستخدماً الإحصاء H .

٧ ـ نريد إختبار نوعين من الدهان ، والنوع I أرخص من النوع II ، فيتألف الإختبار من إعطاء علامات لكل من النوعين ، بعد تعريضهما لشروط طقس معينة ، ولفترة ستة أشهر . وكانت نتائج خمس عينات من كل من النوعين كما يلي :

النوع I	85	87	92	80	84
النوع II	89	89	90	84	88

والمطلوب تحليل هذه النتائج مستخدما إختبار مجموع الرتب ثم الإختبار t .

الفصل السادس عشر

بيانات التعداد

١٦ ـ ١ مقدمة : كانت مادة التحليل الإحصائي فيما مضى قياسات تتم على متحولات معينة . ولكن توجد مسائل لا يهمنا فيها إلا تعداد الحالات التي تنضوي تحت صفة معينة . فمثلاً عند قذف قطع نقود ، نحصي عدد الأوجه H الناتجة بعد 20 قذفة ، وفي دراسات علم الوراثة ، نحصي عدد السلالات التي ترث صفة معينة مثل لون الشعر ؛ وفي دراسات سبر الرأي العام ، نحصي عدد الناخبين المؤيدين ضمن عينة ؛ وعند تدقيق وسقات البضاعة بطريقة العينة ، نحصي عدد القطع غير المقبولة في عينة الخ . وكثيراً ما نحول مسألة تحوي قياسات إلى أخرى نحصي فيها عدد الوقوعات ، وذلك بأن نخصص بصورة كيفية قياسات معينة لكل خاصة أو صنف . فعل سبيل المثال ، يمكننا قياس الأطوال ثم إحصاء عدد الحالات التي تقع بين 60 بوصة و 65 بوصة ، ونسميها الصنف الأول من الأطوال ، الخ . ونقوم بمثل هذا عند إعداد جدول تكراري ، وبعد ذلك نتجاهل كل القياسات، ونركز إنتباهنا على الأصناف الحاصلة وعدد الملاحظات التي وقعت ضمن كل صنف . وسنعتمد بصورة رئيسية عند تحليل بيانات التعداد الإحصائي على إحصاء نسميه الإحصاء x^2 ويتوزع وفق التوزيع χ^2

١٦ ـ ٢ الإحصاء x^2 : لنفرض وجود k من الأصناف ، وأن لدينا عينة عشوائية من N ملاحظة ، بحيث تقع كل من هذه الملاحظات في واحد وواحد فقط من الأصناف . لنحصي الآن التواتر الملحوظ ضمن كل صنف ،

ولنرمز لهذه التواترات بـ $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ، حيث $\sum_{i=1}^{k} f_i = N$ ولنفرض الآن وجود تواترات نظرية F_1 و $F_2, \ldots, F_k$ موافقة لكل صنف من الأصناف الـ k ، بحيث يكون $\sum_{i=1}^{k} F_i = N$. فالسؤال المطروح هو ما إذا كانت التواترات الملحوظة تتفق أو لا تتفق مع التواترات النظرية ، وبالطبع فإن كلاً من التواترات الملحوظة سوف يحيد عن التواتر النظري الموافق له ، بصورة عامة ، والفرضية التي نريد إختبارها هي أن هذا الحيدان ليس هاماً ، أي أن نتائج العينة تأتي مؤيدة ، أو لا تتناقض مع ما تعرضه الفرضية حول التواترات النظرية للأصناف $F_1, F_2, \ldots, F_k$. وإحصاء الإختبار الذي سنستخدمه من أجل فرضية من هذا النوع هو :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i}$$

والتوزيع الإحتمالي لهذا الإحصاء هو تقريباً التوزيع χ^2 بـ (k-1) درجة من الحرية . وعلى سبيل المثال ، إذا كان لدينا 10 أصناف ، فإن عدد درجات الحرية هو 9 . وبإستخدام جدول التوزيع χ^2 في الملحق نجد أن إحتمال كون الإحصاء x^2 أقل من 3,33 هو في هذه الحالة 05. وأن إجتمال كونه أقل من 16.92 هو 95. ، الخ .

ولكي يكون التقريب جيداً يجب أن يكون حجم العينة N كبيراً بكفاية بحيث لا يكون أي من التواترات f_i أقل من 1 ، وبحيث لا يكون أكثر من 20% من التواترات أقل من 5 . وفي هذه المناقشة عرضنا المسألة بشكلها العام . وسنقدم فيما يلي مسائل تطبيقية محددة تنضوي تحت المبدأ الذي أوضحناه في هذه الفقرة :

١٦ ـ ٣ **التصنيف الأحادي** : نقصد بمسائل التصنيف الأحادي المسائل التي تكون فيها التكرارات النظرية $F_1, F_2, \ldots, F_k$ المذكورة في الفقرة السابقة محددة سلفاً .

فمثلاً عند قذف قطعة نقود صحيحة نتوقع أن يظهر وجه « النقش » في 50% من المرات . ولذلك فإن التكرارات النظرية في 140 قذفة هي 70 لوجه « النقش » و 70 لوجه « الطرّة » . وإذا لاحظنا في تجربة تحوي 140 قذفة ، أن التكرارات الفعلية الملحوظة هي 60 لوجه « النقش » و 80 لوجه « الطرّة » ، فنحسب عندئذ :

$$x^2 = \frac{(80-70)^2}{70} + \frac{(60-70)^2}{70} = \frac{100}{70} + \frac{100}{70} = 2.857$$

وإذا كانت قطعة النقود صحيحة ، أي إذا كان إحتمال ظهور وجه « النقش » هو $\frac{1}{2}$ ، فسيكون $P(x^2 < 6.63) = .99$ و $P(x^2 < 3.84) = .95$ وذلك من الجدول ٣ بدرجة واحدة من الحرية . والقيمة الملحوظة وهي $x^2 = 2.857$ ليست كبيرة بكفاية لرفض الفرضية بأن إحتمال ظهور وجه « النقش » هو 0.5 ، وذلك عند مستوى الأهمية $\alpha = .05$. وقد تكون القيمة الملحوظة هنا كبيرة إلى الحد الذي يدعو إلى الشك فنقرر إعادة التجربة بعدد من القذفات أكبر من 140 .

وكمثال آخر نذكر أنه يُحدَّد في علم الوراثة أن بعض الصفات تورَّث بنسبة 1:3 ، أي أن ربع النسل على المدى الطويل سيتصف بصفة معينة ، وثلاثة أرباعهسوف لا يتصف بهذه الصفة . وقد وجدنا في تجربة من تجارب علم الوراثة أن 1981 من ذباب الفواكه له عيون بيضاء ، بينما 7712 له عيون حمراء . فإذا أردنا اختبار الفرضية بأن نسبة الذباب ذي العيون البيضاء إلى الذباب ذي العيون الحمراء هي نسبة 1:3 نرتب الجدول (١٦ ــ ١) :

	الملحوظ	النظري
أبيض	1981	2423.25
أحمر	7712	7269.75
	9693	9693.00

ومنه نحسب الإحصاء x^2 كما يلي :

$$x^2 = \frac{(1981-2423.25)^2}{2423.25} + \frac{(7712-7269.75)^2}{7269.75} = 107.6$$

وهذه القيمة أكبر من أي من قيم جدول التوزيع χ^2 الموافقة لدرجة واحدة من الحرية . ولذلك نرفض الفرضية بأن النسبة النظرية هي نسبة 1 إلى 3 .

وكمثال آخر من علم الوراثة ناخذ مسألة تصالب نوعين من البازلاء . فقد أحصى ما نديل بذورنباتات كما في الجدول (١٦ ــ ٢) . وتقول نظرية ما نديل في الوراثة أن هذه التواترات يجب أن تكون بنسبة 9:3:3:1 أي أن $\frac{9}{16}$ يجب أن يكون مستديراً وأصفراً ، الخ . وللإحصاء x^2 هنا ثلاث درجات من الحرية . والتواترات النظرية للبازلاء المستديرة

جدول ١٦ ــ ٢

الوصف	التواتر الملحوظ	التواتر النظري	$f_i - F_i$	$(f_i - F_i)^2/F_i$
مستدير وأصفر	315	312.75	2.25	.016
مجعد وأصفر	101	104.25	−3.25	.101
مستدير وأخضر	108	104.25	3.75	.135
مجعد وأخضر	32	34.75	−2.75	.218
المجموع	556	556.00	. . . .	.470

والصفراء هي $556 \times \frac{9}{16} = 312.75$ ، وللمجعدة وصفراء $104.25 = 556 \times \frac{3}{16}$ ، الخ . أما قيمة x^2 فهي 0.470 ، وهي أصغر من القيمة الحرجة عند المستوى .05 وهي $\chi^2_{.95}(3) = 7.81$ ، ولذلك نقول بأنه لا توجد دلالة كافية لرفض الفرضية .

١٦ ـ ٤ الجدول $r \times c$ أو التصنيف الثنائي : لنفرض أننا صفنا **N** فرداً وفقاً لصفتين أو قاعدتين مختلفتين. وكل ما نعلمه عن ملاحظة هو الخلية من خلايا الجدول $r \times c$ (جدول يحوي r صفاً و c عموداً) التي ستقع فيها الملاحظة. وسنحصل نتيجة لهذا الفرز على جدول (١٦ ـ ٣). وترمز o_{ij} إلى عدد الملاحظات التي تنتمي إلى الخلية ij من خلايا الجدول $r \times c$. وتشير i إلى الصف و j إلى العمود. وبالطبع فإن :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{c} O_{ij} = N \quad (2)$$

جدول ١٦ ـ ٣

العمود

الصف	1	2	....	c
1	o_{11}	o_{12}		o_{1c}
2	o_{21}	o_{22}		o_{2c}
.				
.				
.				
.				
r	o_{r1}	o_{r2}		o_{rc}

والفرضية التي نرغب في إختبارها ، مستخدمين هذا الجدول ، هو أن الخاصتين الممثلتين بالصفوف والأعمدة ، هما خاصتان مستقلتان أي أن إحتمال أن ينتمي فرد إلى أي صف من الصفوف لا يتأثر بالعمود الذي ينتمي إليه هذا الفرد. وإذا رفضنا الفرضية نقول أن الصفوف والأعمدة ، أو أن بُعدي التصنيف غير مستقلين ، أو بعبارة أخرى نقول بوجود « تفاعل » بين بُعدي التصنيف .

ومن الصعب الحصول على إختبار دقيق لهذه الفرضية ، إلا أنه إذا كان حجم العينة N كبيرا بكفاية ، فيوجد إختبار تقريبي ذو دقة عالية نقوم به مستخدمين إحصاء الإختبار :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \quad (3)$$

حيث O_{ij} هو عدد الملاحظات ضمن الخلية ij و $E_{ij} = \frac{R_i C_j}{n}$ هو عدد الملاحظات الذي نتوقعه ضمن الخلية (ij) على أساس أن فرضية الإستقلال صحيحة ، وحيث ترمز R_i لمجموع الملاحظات في الصف i و C_j لمجموع الملاحظات في العمود j أي أن :

$$R_i = \sum_{j=1}^{c} O_{ij} , \quad C_{j} = \sum_{i=1}^{r} O_{ij} \quad (4)$$

ويمكن البرهان على أن التوزيع التقريبي لإحصاء الإختبار x^2 هو التوزيع χ^2 بِـ (r−1) (c−1) درجة من الحرية . ونرفض عند المستوى α ، الفرضية H_0 بإستقلال قاعدتي التصنيف إذا كان $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha}[(r-1)(c-1)]$

مثال : على شركة أن تختار بين ثلاثة نظم للتقاعد . وقد سبرت رأي المستخدمين من خلال عينة ، وحصلت على المعلومات في الجدول (١٦ ــ ٤) . والسؤال المطروح هو ما إذا كان إختيار المستخدمين مستقلاً عن تصنيفهم وفقاً لوظائفهم .

جدول ١٦ ـ ٤ تصنيف المستخدمين وفق الوظيفة ونظام التقاعد المفضل

التصنيف	عدد المستخدمين الذين يفضلون			المجموع
	النظام A	النظام B	النظام C	
مستخدمو المصنع	160	39	10	200
موظفو الدواوين	140	40	20	200
المراقبون والمشرفون	80	10	10	100
الإداريون	70	20	10	100
المجموع	450	100	50	600

والخطوة الأولى هي وضع جدول القيم المتوقعة وهو ما نجده في الجدول (١٦ ـ ٥)

جدول ١٦ ـ ٥ القيم المتوقعة للملاحظات أي قيم E_{ij}

التصنيف	النظام A	النظام B	النظام C
مستخدمو المصنع	150	100/3	50/3
موظفو الدواوين	150	100/3	50/3
المراقبون والمشرفون	75	100/6	50/6
الإداريون	75	100/6	50/6

ونحسب الان قيمة الإحصاء :

فنجد :

$$x^2 = \frac{(160-150)^2}{150} + \frac{3}{100}(30 - \frac{100}{3})^2 + \frac{3}{50}(10 - \frac{50}{3})^2$$
$$+ \frac{1}{150}(140-150)^2 + \frac{3}{100}(40 - \frac{100}{3})^2 + \frac{3}{50}(20 - \frac{50}{3})^2$$
$$+ \frac{1}{75}(80-75)^2 + \frac{6}{100}(10 - \frac{100}{6})^2 + \frac{6}{50}(10 - \frac{50}{6})^2$$
$$+ \frac{1}{75}(70-75)^2 + \frac{6}{100}(20 - \frac{100}{6})^2 + \frac{6}{50}(10 - \frac{50}{6})^2 = 11$$

ونلاحظ أن $\chi^2 = 11 < \chi^2_{.99}(6) = 12.812$ ولذلك فإنه لا يمكننا رفض الفرضية ، وبالتالي نستنتج أن إختيار المستخدمين لنظامهم التقاعدي المفضل كان ، على الأرجح ، مستقلاً عن العمل الذي يشغلونه .

ويمكن تعميم هذه الطريقة إلى حالة جدول نصنف فيه الملاحظات وفقاً لِـ n من الخواص أو القواعد . فلكي نختبر الفرضية بأن قواعد التصنيف الـ n مستقلة فيما بينها نحسب المجموع فوق كل الخلايا للكمية $\frac{(\text{الملحوظ} - \text{المتوقع})^2}{\text{المتوقع}}$ وحيث تساوي القيمة المتوقعة لكل خلية جداء المجاميع الهامشية الموافقة للصف ، العمود ، الخ . الذي تقع فيه الخلية (أي الموافقة للخواص التي تحدد موقع الخلية) مقسوماً على N^{n-1} . والإحصاء الناتج يتوزع تقريباً وفقاً للتوزيع χ^2 بِـ $(r-1)\ (c-1)\ ...$ درجة من الحرية حيث r عدد الصفوف ، c عدد الأعمدة ، الخ .

١٦ـ ٥ **الجداول** 2×2 : يمكن تبسيط الإجراءات الحسابية في حالة جدول يحوي صفين وعمودين فقط . فمن أجل الجدول (١٦ ـ ٦) يمكن كتابة الإحصاء x^2 على الشكل :

$$x^2 = \frac{(ad-bc)^2 N}{(a+b)\ (a+c)\ (b+d)\ (c+d)} \qquad (5)$$

وفي هذه الحالة يمكن تحسين دقة التوزيع التقريبي χ^2 بصورة ملحوظة وذلك بإضافة عامل التصحيح من أجل الإستمرار (وهو يكافىء طرح $\frac{1}{2}$ من كل من a و d وإضافة $\frac{1}{2}$ إلى كل من b و c في الكمية $|ad-bc|$) وعندئذ يصبح الإحصاء x^2 على الشكل :

$$x^2 = \frac{(|ad-bc| - \frac{1}{2}N)^2 N}{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)} \quad (6)$$

جدول ١٦ ـ ٦

	I	II	المجموع
1	a	b	a + b
2	c	d	c + d
المجموع	a + c	b + d	a + b + c + d = N

مثال : حصلنا على البيان الإحصائي في الجدول (١٦ ـ ٧) نتيجة لسؤال عينة عشوائية عن 500 شخص من رغبة كل منهم في أن يمتلك جهازاً للتلفزيون أم لا . وبعد أن حصلنا على الإجابات طُرح السؤال التالي : ألا تتأثر الرغبة في إمتلاك جهاز تلفزيون بجنس الشخص الذي نسأله ؟ ولدى فرز الإجابات وفقاً للجنس وجدنا الجدول التالي :

جدول ١٦ ـ ٧

التصنيف	الرجال	النساء	المجموع
يريد تلفزيون	80	170	250
لا يريد تلفزيون	120	130	250
المجموع	200	300	500

ومن هذا الجدول نجد :

$$\chi^2 = \frac{(|80 \times 130 - 120 \times 170| - \frac{1}{2} \times 500)^2 . (500)}{250 \times 200 \times 300 \times 250} = 13.47$$

وبالمقارنة مع $\chi^2_{.95}(1) = 3.84$ نرفض الفرضية عند المستوى $\alpha = .05$.

١٦ ـ ٦ **إختبارات الوسط** : هذه الإختبارات مفيدة بصورة خاصة من أجل حالات يمكن أن نحدد فيها بسهولة النسب المئوية ضمن مجموعة من الملاحظات .

إختبار الوسط من أجل المقارنة بين عينتين : لنفرض عينتين حجماهما N_1 و N_2 وليكن $N = N_1 + N_2$. وليكن μ وسط الـ N من الملاحظات التي تحويها العينتان . فيمكن إستخدام الملاحظات التي تقع ، في كل من العينتين ، فوق وتحت الوسط μ لإختبار الفرضية بأن العينتين مسحوبتين عشوائياً من مجتمعين لهما نفس التوزيع الإحتمالي . فعلى سبيل المثال ، في الجدول (١٦ ـ ٨) نجد تصنيف ملاحظات عينتين حجماهما $N_1 = N_2 = 15$ وفقاً لموقعها من الوسط المشترك للعينتين . ولإختبار الفرضية المذكورة نحلل هذا الجدول وفقاً لما ورد في الفقرة السابقة حول تحليل الجداول 2×2 . ونرفض

الفرضية إذا كانت قيمة الإحصاء x^2 أكبر من القيمة الحرجة كما نجدها في جدول التوزيع χ^2 من أجل درجة واحدة عن الحرية .

جدول ١٦ ـ ٨

	رقم العينـــــة		المجموع
	I	II	
فوق الوسط	6	9	15
تحت الوسط	9	6	15
	15	15	30

وفي مثالنا هنا نجد :

$$\chi^2 = \frac{(|6^2 - 9^2| - 15)^2 \times 30}{15 \times 15 \times 15 \times 15} = .53$$

وهي أصغر من $\chi^2_{.95}(1) = 3.84$ ، أي أنه لا يتوفر لنا دليل كاف لرفض الفرضية عند المستوى $\alpha = .05$

إختبار الوسط من أجل k من العينات : يمكننا تعميم الفكرة لإختبار الفرضية بأن k من العينات مسحوبة عشوائياً من مجتمعات لها نفس التوزيع . وفي هذه الحالة نحسب وسط كافة الملاحظات في جميع العينات ، ونصنف ملاحظات كل عينة على أساس وقوعها فوق هذا الوسط أو تحته . فنجد جدولاً من النوع الذي ناقشناه في الفقرة (١٦ ـ ٣) وأبعاده هي $2 \times k$ أي أنه يحوي k صفاً وعمودين . ونحلله تماماً بنفس الطريقة التي استعرضناها في الفقرة (١٦ ـ ٣) حيث $r = k$ و $c = 2$. ونرفض الفرضية إذا كان الإحصاء x^2 بـ $(k - 1)$ درجة من الحرية ، كما نحسبه من جدول التصنيف ، أكبر من القيمة الحرجة ، كما نجدها في جدول التوزيع χ^2.

تعميم إختبار الوسط : ويمكن تعميم إختبار الوسط بحيث يشمل أي عدد مثبت من النسب المئوية الموافقة لجملة الملاحظات التي تحويها العينات ، بدلاً من أن يشمل الوسط فقط وهو النسبة المئوية $P_{.50}$. ونصنف ملاحظات كل عينة وفقاً لمواقعها من هذه النسب المئوية ، ثم نحلل جدول التصنيف الحاصل كما رأينا في الفقرة (١٦ ـ ٤) . والفرضية التي نختبرها هي الفرضية بأن العينات الـ k مسحوبة من مجتمعات لها نفس التوزيع العشوائي . وعدد درجات الحرية الموافقة للإحصاء x^2 هو $(r-1)$ $(k-1)$ ، حيث r هو عدد الأصناف التي تتوزع الملاحظات وفقها . وعلى سبيل المثال ، نجد في الجدول (١٦ ـ ٩) ملاحظات ثلاث عينات $(k=3)$ مصنفة وفقاً لكونها أكبر من $P_{.75}$ ، بين $P_{.50}$ و $P_{.75}$ ، بين $P_{.25}$ و $P_{.50}$ ، وتحت $P_{.25}$. (النسبة المئوية P_{γ} لمجموعة من الملاحظات هي العدد الذي يقع γ في المائة من الملاحظات تحته و $(\gamma - 1)$ في المائة فوقه) . وللإحصاء x^2 في مثالنا هنا $6 = 3 \times 2$ درجات من الحرية . والتواترات النظرية الضرورية لتحليل جدول التصنيف 3×4 ، جميعها تساوي $5 = \frac{15 \times 20}{60}$. وقيمة x^2 هي :

$$x^2 = \frac{(5-5)^2}{5} + \frac{(7-5)^2}{5} + \dots + \frac{(4-5)^2}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

وبما أن $x^2_{.95}(6) = 11.07$ فلا يتوفر لنا الدليل الكافي لرفض الفرضية عند المستوى $\alpha = .05$.

جدول ١٦ ـ ٩

	رقم العينة			
	I	II	III	المجموع
فوق $P_{.75}$	5	7	3	15
بين $P_{.50}$ $P_{.75}$	3	3	9	15
بين $P_{.25}$ $P_{.50}$	4	7	4	15
تحت $P_{.25}$	8	3	4	15
المجموع	20	20	20	60

١٦ ـ ٧ إختبار جودة التلاؤم : يشير تعبير «جودة التلاؤم» إلى المقارنة بين توزيع ملحوظ وتوزيع نظري . وسنقوم في هذه الفقرة بمقارنة توزيع عينة مع التوزيع الطبيعي . أي أننا سنختبر الفرضية بأن التوزيع الموافق للمجتمع الذي سحبنا منه العينة هو التوزيع الطبيعي . ولا تختلف الطريقة هنا عما وجدناه في الفقرة السابقة باستثناء ما يتعلق بحساب درجات الحرية .

لنفرض أن لدينا عينة من N ملاحظة ، وأن متوسطها $\bar{x}$ وتشتتها s^2 . ومعادلة المنحني الطبيعي الذي سنقوم بملاءمته مع هذه العينة هو :

$$Y = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} \qquad (7)$$

وبإستخدام جدول التوزيع الطبيعي يمكن إيجاد المساحة تحت هذا المنحني بين أي نقطتين. ويمكن تقسيم مجال المتحول x إلى عدد من المجالات ستكون بالنسبة لنا الأصناف التي تتوزع الملاحظات وفقاً لها. وإختيار هذه المجالات كيفي بإستثناء أن التواتر النظري في كل منها يجب ألا يقل عن 1. والتواتر النظري لكل مجال هو المساحة تحت المنحني الطبيعي في (7) فوق هذا المجال. بينما التواتر الملحوظ هو عدد ملاحظات العينة الواقعة في ذلك المجال. ونحسب الإحصاء x^2 كما رأينا في الفقرة (١٦ ـ ٣). وعدد درجات الحرية في هذا المثال هو $(k-3)$ حيث k هو عدد المجالات. وبصورة عامة، من أجل ملاءمة أي منحن تكراري، ينخفض عدد درجات الحرية بمقدار واحد من أجل كل وسيط قمنا بتقديره من العينة. وهنا قدرنا المتوسط بِـ $\bar{x}$ والإنحراف المعياري بِـ s ولذلك فإن درجات الحرية الموافقة هي $(k-1)-2=k-3$

وكمثال عددي، لنفرض عينة تحوي 100 ملاحظة كما نجد في الجدول (١٦ ـ ١٠). وبما أن الإحصاء $x^2 = 1.99$ أصغر من $\chi^2_{.95}(4) = 9.49$، فإننا نقبل، عند المستوى $\alpha = .05$، الفرضية بأن التوزيع الموافق للمجتمع الذي سحبنا منه العينة هو التوزيع الطبيعي.

(١٦ ـ ١٠)

منتصف المجال	التواترات	$\frac{x-\bar{x}}{s}$ عند نهايتي المجال	المجال	التكرار النظري F_i	التواتر الملحوظ f_i	$\frac{(f_i-F_i)^2}{F_i}$
145	9	+1.60	140+	5.5	8	1.14
135	9	+1.00	130–140	10.4	9	.19
125	16	+.40	120–130	18.6	16	.36
115	23	−.20	110–120	23.5	23	.01
105	21	−.80	100–110	20.9	21	.00
95	15	−1.40	90–100	13.1	15	.29
85	8		90 ـ	8.1	8	.00
	100			100.1	100	1.99

$\bar{x} = 113.3, S = 16.65$

تمارين

١ ـ في تجربة في علم النبات كانت نتيجة تصالب سلالتين من نوع معين من الزهور أربعة أصناف بالتواترات الملحوظة التالية 120, 48, 36, 13 . ألا تتفق هذه النتائج مع قوانين ماندیل التي تحدد النسب 9:3:3:1 ؟

٢ ـ كانت نتائج مائتي قذفة لقطعة زهر كما يلي :

عدد البقع الناتجة	1	2	3	4	5	6
التواتر	30	27	29	31	40	43

فهل هناك سبب للاعتقاد بأن قطعة الزهر غير متوازنة ؟

٣ ـ في الجدول التالي التوزيع التكراري لمتوسط عينات حجمها N = 10 ومتوسط عينات حجمها N = 40 . أـ استخدم χ^2 لإختبار الفرضية بأن متوسطات العينات ذات الحجم N = 10 هي من مجتمع طبيعي . ب ـ أعد نفس العمل بالنسبة لمتوسطات العينات ذات الحجم N = 40 .

N = 40		N = 10	
التواتر	منتصف المجال	التواتر	منتصف المجال
3	.425	2	.75
0	.375	3	.65
9	.325	7	.55
6	.275	13	.45
8	.225	13	.35
11	.175	19	.25
21	.125	22	.15
18	.075	24	.05
30	.025	26	–.05
36	–.025	19	–.15
16	–.075	17	–.25
14	–.125	12	–.35
10	–.175	11	–.45
9	–.225	5	–.55
3	–.275	4	–.65
4	–.325	3	–.75
0	–.375		
2	–.425		
200	متوسط $\bar{x}$ = .019 $\sigma_{\bar{x}}$ = .161	200	متوسط $\bar{x}$ = .009 $\sigma_{\bar{x}}$ = .322

٤ ـ أختيرت عينة من طلبة الجامعة وسئلوا رأيهم في برنامج تلفزيوني معين. فكانت النتائج كما هو مبين في الجدول. إذا علمت أن نصف العدد ضمن كل صف من الطلاب والنصف الآخر من الطالبات، أختبر الفرضية بأن الرأي في هذا الموضوع مستقل عن المرحلة الدراسية.

الصف	مع البرنامج	ضد البرنامج
	العدد	
الأول	120	80
الثاني	130	70
الثالث	70	30
الرابع	80	20

٥ ـ صنفنا عينة من 147 طالبة جامعية وفق مصدر الدخل ، ووفقاً لما إذا كانت تشتري ألبستها بصورة مبرمجة ، وكانت النتائج كما يلي :

مصدر الدخل	نادراً	غالباً	دائماً
	تشتري ثيابها بصورة مبرمجة :		
تكسب بنفسها كل مصروفها	2	14	27
تكسب جزءاً من مصروفها	8	17	5
لها علاوة منتظمة	4	12	7
تأخذ النقود حسب الحاجة	15	25	11

فهل نستطيع القول بأن تواتر شراء الألبسة بصورة مبرمجة مستقل عن مصدر الدخل ؟

٦ ـ حصل الطلاب في ثلاثة صفوف في طرق الإحصاء على مجموع

العلامات المبينة في الجدول . استخدم إختبار الوسط المعمم لإختبار الفرضية بأنه لا توجد تأثيرات هامة لموعد إجتماع الفصل على درجات الطلاب

الساعة الثانية بعد الظهر		الساعة العاشرة صباحاً		الساعة الثامنة صباحاً	
162	134	131	79	122	121
128	89	143	145	141	117
133	108	107	119	126	145
93	88	86	139	145	108
118	146	94	143	114	142
126	153	164	133	136	154
127	130	139	149	151	115
150	144	151	107	105	81
138	125	141	154	103	122
119	111	131	102	108	127
142	87	65	108		
		141	131		

الفهرس

ص

ملحق

بعض الجداول الاحصائية

الجدول ١ : جدول التوزيع الطبيعي .

القيمة المذكورة في الجدول هي المساحة تحت منحني الكثافة على يمين الصفر .

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

الجدول ٢ : جدول التوزيع t .

df	$t_{.60}$	$t_{.70}$	$t_{.80}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$
1	.325	.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.289	.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.277	.584	.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.271	.569	.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.267	.559	.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.265	.553	.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.263	.549	.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.262	.546	.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.261	.543	.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.260	.542	.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.260	.540	.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.259	.539	.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.259	.538	.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.258	.537	.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.258	.536	.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.258	.535	.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.257	.534	.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.257	.534	.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.257	.533	.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.257	.533	.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.257	.532	.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.256	.532	.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.256	.532	.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.256	.531	.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.256	.531	.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.256	.531	.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.256	.531	.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.256	.530	.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.256	.530	.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.256	.530	.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	.255	.529	.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	.254	.527	.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	.254	.526	.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	.253	.524	.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576
df	$-t_{.40}$	$-t_{.30}$	$-t_{.20}$	$-t_{.10}$	$-t_{.05}$	$-t_{.025}$	$-t_{.01}$	$-t_{.005}$

عند قراءة الجدول من الأسفل نضع إشارة ـ قبل القيم الموجودة في متن الجدول . وعند حساب قيمة t من أجل درجة حرية غير مذكورة في الجدول من الأفضل استخدام مقلوب درجات الحرية في عملية التناسب بدلاً من درجات الحرية نفسها .

تابع الجدول ٣ .

$\chi^2 0.100$	$\chi^2 0.050$	$\chi^2 0.025$	$\chi^2 0.010$	$\chi^2 0.005$	*d.f.*
2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	1
4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966	2
6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381	3
7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602	4
9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	5
10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	6
12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	7
13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550	8
14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	9
15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882	10
17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569	11
18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	12
19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194	13
21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193	14
22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	15
23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	16
24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	17
25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	18
27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822	19
28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968	20
29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010	21
30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956	22
32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813	23
33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585	24
34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278	25
35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899	26
36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449	27
37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933	28
39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356	29
40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720	30
51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659	40
63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	50
74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517	60
85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215	70
96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321	80
107.565	113.145	118.136	124.116	128.299	90
118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	100

الجدول ٣ : جدول التوزيع χ^2

d.f.	$\chi^2$0.995	$\chi^2$0.990	$\chi^2$0.975	$\chi^2$0.950	$\chi^2$0.900
1	0.0000393	0.0001571	0.0009821	0.0039321	0.0157908
2	0.0100251	0.0201007	0.0506356	0.102587	0.210720
3	0.0717212	0.114832	0.215795	0.351846	0.584375
4	0.206990	0.297110	0.484419	0.710721	1.063623
5	0.411740	0.554300	0.831211	1.145476	1.61031
6	0.675727	0.872085	1.237347	1.63539	2.20413
7	0.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581

الجدول م٤ : جدول التوزيع F . القيم الموافقة لِـ 5% في الذيل الأيمن أي F.05

درجات الحرية في الصورة

درجات الحرية في المخرج	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1 67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

كما في الجدول t يستخدم مقلوب درجات الحرية في عمليات التناسب .

الجدول ٤ ب : جدول التوزيع F القيم الموافقة لِـ 1% في الذيل الأيمن أي F.01

درجات الحرية في الصورة

درجات الحرية في المخرج	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

كما في الجدول t يستخدم مقلوب درجات الحرية في عمليات التناسب .

تابع الجدول ٤ ج : النسب المئوية للتوزيع $F (\nu_1 | \nu_2)$

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	.051	.058	.062	.066	.069	.072	.074	.077	.078	.080	.081	.083	.0005	1
.001	.060	.067	.071	.075	.079	.082	.084	.087	.088	.089	.091	.092	.001	
.005	.093	.101	.105	.109	.113	.116	.118	.121	.122	.124	.126	.127	.005	
.01	.115	.124	.128	.132	.137	.139	.141	.145	.146	.148	.150	.151	.01	
.025	.161	.170	.175	.180	.184	.187	.189	.193	.194	.196	.198	.199	.025	
.05	.220	.230	.235	.240	.245	.248	.250	.254	.255	.257	.259	.261	.05	
.10	.325	.336	.342	.347	.353	.356	.358	.362	.364	.366	.368	.370	.10	
.25	.698	.712	.719	.727	.734	.738	.741	.747	.749	.752	.754	.756	.25	
.50	2.09	2.12	2.13	2.15	2.16	2.17	2.17	2.18	2.18	2.19	2.19	2.20	.50	
.75	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.74	9.76	9.78	9.80	9.82	9.84	9.85	.75	
.90	61.2	61.7	62.0	62.3	62.5	62.7	62.8	63.0	63.1	63.2	63.3	63.3	.90	
.95	246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254	.95	
.975	985	993	997	100^{1}	101^{1}	101^{1}	101^{1}	101^{1}	101^{1}	102^{1}	102^{1}	102^{1}	.975	
.99	616^{1}	621^{1}	623^{1}	626^{1}	629^{1}	630^{1}	631^{1}	633^{1}	634^{1}	635^{1}	636^{1}	637^{1}	.99	
.995	246^{2}	248^{2}	249^{2}	250^{2}	251^{2}	252^{2}	253^{2}	253^{2}	254^{2}	254^{2}	254^{2}	255^{2}	.995	
.999	616^{3}	621^{3}	623^{3}	626^{3}	629^{3}	630^{3}	631^{3}	633^{3}	634^{3}	635^{3}	636^{3}	637^{3}	.999	
.9995	246^{4}	248^{4}	249^{4}	250^{4}	251^{4}	252^{4}	252^{4}	253^{4}	253^{4}	253^{4}	254^{4}	254^{4}	.9995	
.0005	.076	.088	.094	.101	.108	.113	.116	.122	.124	.127	.130	.132	.0005	2
.001	.088	.100	.107	.114	.121	.126	.129	.135	.137	.140	.143	.145	.001	
.005	.130	.143	.150	.157	.165	.169	.173	.179	.181	.184	.187	.189	.005	
.01	.157	.171	.178	.186	.193	.198	.201	.207	.209	.212	.215	.217	.01	
.025	.210	.224	.232	.239	.247	.251	.255	.261	.263	.266	.269	.271	.025	
.05	.272	.286	.294	.302	.309	.314	.317	.324	.326	.329	.332	.334	.05	
.10	.371	.386	.394	.402	.410	.415	.418	.424	.426	.429	.433	.434	.10	
.25	.657	.672	.680	.689	.697	.702	.705	.711	.713	.716	.719	.721	.25	
.50	1.38	1.39	1.40	1.41	1.42	1.42	1.43	1.43	1.43	1.44	1.44	1.44	.50	
.75	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.45	3.46	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48	.75	
.90	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.48	9.49	9.49	9.49	.90	
.95	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	.95	
.975	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	.975	
.99	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	.99	
.995	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	200	.995	
.999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	.999	
.9995	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	.9995	
.0005	.093	.109	.117	.127	.136	.143	.147	.156	.158	.162	.166	.169	.0005	3
.001	.107	.123	.132	.142	.152	.158	.162	.171	.173	.177	.181	.184	.001	
.005	.154	.172	.181	.191	.201	.207	.211	.220	.222	.227	.231	.234	.005	
.01	.185	.203	.212	.222	.232	.238	.242	.251	.253	.258	.262	.264	.01	
.025	.241	.259	.269	.279	.289	.295	.299	.308	.310	.314	.318	.321	.025	
.05	.304	.323	.332	.342	.352	.358	.363	.370	.373	.377	.382	.384	.05	
.10	.402	.420	.430	.439	.449	.455	.459	.467	.469	.474	.476	.480	.10	
.25	.658	.675	.684	.693	.702	.708	.711	.719	.721	.724	.728	.730	.25	
.50	1.21	1.23	1.23	1.24	1.25	1.25	1.25	1.26	1.26	1.26	1.27	1.27	.50	
.75	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	.75	
.90	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.14	5.14	5.14	5.13	.90	
.95	8.70	8.66	8.63	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.55	8.54	8.53	8.53	.95	
.975	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	14.0	14.0	13.9	13.9	13.9	13.9	.975	
.99	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.4	26.3	26.2	26.2	26.2	26.1	26.1	.99	
.995	43.1	42.8	42.6	42.5	42.3	42.2	42.1	42.0	42.0	41.9	41.9	41.8	.995	
.999	127	126	126	125	125	125	124	124	124	124	124	123	.999	
.9995	203	201	200	199	199	198	198	197	197	197	196	196	.9995	

الجدول ٤ ج : النسب المئوية لـ(ν_2 , ν_1) F حيث ν_1 عدد درجات الحرية في الصورة
و ν_2 عدد درجات الحرية في المخرج .

نقرأ $0^{3}56$ على أنها 00056 و 200^{1} على أنها 2000 ، و 162^{4} على أنها 1620000

ν_2	Cum. Prop. \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
1	.0005	$.0^{6}62$	$.0^{3}50$	$.0^{2}38$	$.0^{2}94$	.016	.022	.027	.032	.036	.039	.042	.045	.0005
	.001	$.0^{5}25$	$.0^{2}10$	$.0^{2}60$	.013	.021	.028	.034	.039	.044	.048	.051	.054	.001
	.005	$.0^{4}62$	$.0^{2}51$	.018	.032	.044	.054	.062	.068	.073	.078	.082	.085	.005
	.010	$.0^{3}25$	.010	.029	.047	.062	.073	.082	.089	.095	.100	.104	.107	.010
	.025	$.0^{2}15$	.026	.057	.082	.100	.113	.124	.132	.139	.144	.149	.153	.025
	.05	$.0^{2}62$	.054	.099	.130	.151	.167	.179	.188	.195	.201	.207	.211	.05
	.10	.025	.117	.181	.220	.246	.265	.279	.289	.298	.304	.310	.315	.10
	.25	.172	.389	.494	.553	.591	.617	.637	.650	.661	.670	.680	.684	.25
	.50	1.00	1.50	1.71	1.82	1.89	1.94	1.98	2.00	2.03	2.04	2.05	2.07	.50
	.75	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.36	9.41	.75
	.90	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.5	60.7	.90
	.95	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	.95
	.975	648	800	864	900	922	937	948	957	963	969	973	977	.975
	.99	405^{1}	500^{1}	540^{1}	562^{1}	576^{1}	586^{1}	593^{1}	598^{1}	602^{1}	606^{1}	608^{1}	611^{1}	.99
	.995	162^{2}	200^{2}	216^{2}	225^{2}	231^{2}	234^{2}	237^{2}	239^{2}	241^{2}	242^{2}	243^{2}	244^{2}	.995
	.999	406^{3}	500^{3}	540^{3}	562^{3}	576^{3}	586^{3}	593^{3}	598^{3}	602^{3}	606^{3}	609^{3}	611^{3}	.999
	.9995	162^{4}	200^{4}	216^{4}	225^{4}	231^{4}	234^{4}	237^{4}	239^{4}	241^{4}	242^{4}	243^{4}	244^{4}	.9995
2	.0005	$.0^{6}50$	$.0^{3}50$	$.0^{2}42$	.011	.020	.029	.037	.044	.050	.056	.061	.065	.0005
	.001	$.0^{5}20$	$.0^{2}10$	$.0^{2}68$	.016	.027	.037	.046	.054	.061	.067	.072	.077	.001
	.005	$.0^{4}50$	$.0^{2}50$	.020	.038	.055	.069	.081	.091	.099	.106	.112	.118	.005
	.01	$.0^{3}20$	.010	.032	.056	.075	.092	.105	.116	.125	.132	.139	.144	.01
	.025	$.0^{2}13$	.026	.062	.094	.119	.138	.153	.165	.175	.183	.190	.196	.025
	.05	$.0^{2}50$	.053	.105	.144	.173	.194	.211	.224	.235	.244	.251	.257	.05
	.10	.020	.111	.183	.231	.265	.289	.307	.321	.333	.342	.350	.356	.10
	.25	.133	.333	.439	.500	.540	.568	.588	.604	.616	.626	.633	.641	.25
	.50	.667	1.00	1.13	1.21	1.25	1.28	1.30	1.32	1.33	1.34	1.35	1.36	.50
	.75	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.39	.75
	.90	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41	.90
	.95	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	.95
	.975	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	.975
	.99	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	.99
	.995	198	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	199	.995
	.999	998	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	999	.999
	.9995	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	200^{1}	.9995
3	.0005	$.0^{6}46$	$.0^{3}50$	$.0^{2}44$	.012	.023	.033	.043	.052	.060	.067	.074	.079	.0005
	.001	$.0^{5}19$	$.0^{2}10$	$.0^{2}71$	.018	.030	.042	.053	.063	.072	.079	.086	.093	.001
	.005	$.0^{4}46$	$.0^{2}50$	.021	.041	.060	.077	.092	.104	.115	.124	.132	.138	.005
	.01	$.0^{3}19$	.010	.034	.060	.083	.102	.118	.132	.143	.153	.161	.168	.01
	.025	$.0^{2}12$	.026	.065	.100	.129	.152	.170	.185	.197	.207	.216	.224	.025
	.05	$.0^{2}46$	.052	.108	.152	.185	.210	.230	.246	.259	.270	.279	.287	.05
	.10	.019	.109	.185	.239	.276	.304	.325	.342	.356	.367	.376	.384	.10
	.25	.122	.317	.424	.489	.531	.561	.582	.600	.613	.624	.633	.641	.25
	.50	.585	.881	1.00	1.06	1.10	1.13	1.15	1.16	1.17	1.18	1.19	1.20	.50
	.75	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.45	.75
	.90	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22	.90
	.95	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	.95
	.075	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.4	14.3	.975
	.99	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1	.99
	.995	55.6	49.8	47.5	46.2	45.4	44.8	44.4	44.1	43.9	43.7	43.5	43.4	.995
	.999	167	149	141	137	135	133	132	131	130	129	129	128	.999
	.9995	266	237	225	218	214	211	209	208	207	206	204	204	.9995

تابع الجدول ٤ ج : النسب المئوية للتوزيع F .

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	.105	.125	.135	.147	.159	.166	.172	.183	.186	.191	.196	.200	.0005	4
.001	.121	.141	.152	.163	.176	.183	.188	.200	.202	.208	.213	.217	.001	
.005	.172	.193	.204	.216	.229	.237	.242	.253	.255	.260	.266	.269	.005	
.01	.204	.226	.237	.249	.261	.269	.274	.285	.287	.293	.298	.301	.01	
.025	.263	.284	.296	.308	.320	.327	.332	.342	.346	.351	.356	.359	.025	
.05	.327	.349	.360	.372	.384	.391	.396	.407	.409	.413	.418	.422	.05	
.10	.424	.445	.456	.467	.478	.485	.490	.500	.502	.508	.510	.514	.10	
.25	.664	.683	.692	.702	.712	.718	.722	.731	.733	.737	.740	.743	.25	
.50	1.14	1.15	1.16	1.16	1.17	1.18	1.18	1.18	1.18	1.19	1.19	1.19	.50	
.75	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	.75	
.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.78	3.77	3.76	3.76	.90	
.95	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.66	5.65	5.64	5.63	.95	
.975	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.38	8.36	8.32	8.31	8.29	8.27	8.26	.975	
.99	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.7	13.6	13.6	13.5	13.5	13.5	.99	
.995	20.4	20.2	20.0	19.9	19.8	19.7	19.6	19.5	19.5	19.4	19.4	19.3	.995	
.999	46.8	46.1	45.8	45.4	45.1	44.9	44.7	44.5	44.4	44.3	44.1	44.0	.999	
.9995	66.5	65.5	65.1	64.6	64.1	63.8	63.6	63.2	63.1	62.9	62.7	62.6	.9995	
.0005	.115	.137	.150	.163	.177	.186	.192	.205	.209	.216	.222	.226	.0005	5
.001	.132	.155	.167	.181	.195	.204	.210	.223	.227	.233	.239	.244	.001	
.005	.186	.210	.223	.237	.251	.260	.266	.279	.282	.288	.294	.299	.005	
.01	.219	.244	.257	.270	.285	.293	.299	.312	.315	.322	.328	.331	.01	
.025	.280	.304	.317	.330	.344	.353	.359	.370	.374	.380	.386	.390	.025	
.05	.345	.369	.382	.395	.408	.417	.422	.432	.437	.442	.448	.452	.05	
.10	.440	.463	.476	.488	.501	.508	.514	.524	.527	.532	.538	.541	.10	
.25	.669	.690	.700	.711	.722	.728	.732	.741	.743	.748	.752	.755	.25	
.50	1.10	1.11	1.12	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.15	1.15	1.15	.50	
.75	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87	1.87	1.87	1.87	.75	
.90	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13	3.12	3.12	3.11	3.10	.90	
.95	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.40	4.39	4.37	4.36	.95	
.975	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.14	6.12	6.08	6.07	6.05	6.03	6.02	.975	
.99	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.20	9.13	9.11	9.08	9.04	9.02	.99	
.995	13.1	12.9	12.8	12.7	12.5	12.5	12.4	12.3	12.3	12.2	12.2	12.1	.995	
.999	25.9	25.4	25.1	24.9	24.6	24.4	24.3	24.1	24.1	23.9	23.8	23.8	.999	
.9995	34.6	33.9	33.5	33.1	32.7	32.5	32.3	32.1	32.0	31.8	31.7	31.6	.9995	
.0005	.123	.148	.162	.177	.193	.203	.210	.225	.229	.236	.244	.249	.0005	6
.001	.141	.166	.180	.195	.211	.222	.229	.243	.247	.255	.262	.267	.001	
.005	.197	.224	.238	.253	.269	.279	.286	.301	.304	.312	.318	.324	.005	
.01	.232	.258	.273	.288	.304	.313	.321	.334	.338	.346	.352	.357	.01	
.025	.293	.320	.334	.349	.364	.375	.381	.394	.398	.405	.412	.415	.025	
.05	.358	.385	.399	.413	.428	.437	.444	.457	.460	.467	.472	.476	.05	
.10	.453	.478	.491	.505	.519	.526	.533	.546	.548	.556	.559	.564	.10	
.25	.675	.696	.707	.718	.729	.736	.741	.751	.753	.758	.762	.765	.25	
.50	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10	1.11	1.11	1.11	1.12	1.12	1.12	1.12	.50	
.75	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	.75	
.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.77	2.76	2.75	2.74	2.73	2.73	2.72	.90	
.95	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.71	3.70	3.69	3.68	3.67	.95	
.975	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.98	4.96	4.92	4.90	4.88	4.86	4.85	.975	
.99	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.09	7.06	6.99	6.97	6.93	6.90	6.88	.99	
.995	9.81	9.59	9.47	9.36	9.24	9.17	9.12	9.03	9.00	8.95	8.91	8.88	.995	
.999	17.6	17.1	16.9	16.7	16.4	16.3	16.2	16.0	16.0	15.9	15.8	15.7	.999	
.9995	22.4	21.9	21.7	21.4	21.1	20.9	20.7	20.5	20.4	20.3	20.2	20.1	.9995	

تابع الجدول ٤ ج : النسب المئوية للتوزيع F .

ν_2	ν_1 / Cum. Prop.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
4	.0005	$.0^{6}44$	$.0^{3}50$	$.0^{2}46$	.013	.024	.036	.047	.057	.066	.075	.082	.089	.0005
	.001	$.0^{5}18$	$.0^{2}10$	$.0^{2}73$	.019	.032	.046	.058	.069	.079	.089	.097	.104	.001
	.005	$.0^{4}44$	$.0^{2}50$	.022	.043	.064	.083	.100	.114	.126	.137	.145	.153	.005
	.01	$.0^{3}18$	.010	.035	.063	.088	.109	.127	.143	.156	.167	.176	.185	.01
	.025	$.0^{2}11$	.026	.066	.104	.135	.161	.181	.198	.212	.224	.234	.243	.025
	.05	$.0^{2}44$	.052	.110	.157	.193	.221	.243	.261	.275	.288	.298	.307	.05
	.10	.018	.108	.187	.243	.284	.314	.338	.356	.371	.384	.394	.403	.10
	.25	.117	.309	.418	.484	.528	.560	.583	.601	.615	.627	.637	.645	.25
	.50	.549	.828	.941	1.00	1.04	1.06	1.08	1.09	1.10	1.11	1.12	1.13	.50
	.75	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	.75
	.90	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90	.90
	.95	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	.95
	.975	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75	.975
	.99	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.4	.99
	.995	31.3	26.3	24.3	23.2	22.5	22.0	21.6	21.4	21.1	21.0	20.8	20.7	.995
	.999	74.1	61.2	56.2	53.4	51.7	50.5	49.7	49.0	48.5	48.0	47.7	47.4	.999
	.9995	106	87.4	80.1	76.1	73.6	71.9	70.6	69.7	68.9	68.3	67.8	67.4	.9995
5	.0005	$.0^{6}43$	$.0^{3}50$	$.0^{2}47$	.014	.025	.038	.050	.061	.070	.081	.089	.096	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{2}10$	$.0^{2}75$	.019	.034	.048	.062	.074	.085	.095	.104	.112	.001
	.005	$.0^{4}43$	$.0^{2}50$	.022	.045	.067	.087	.105	.120	.134	.146	.156	.165	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.035	.064	.091	.114	.134	.151	.165	.177	.188	.197	.01
	.025	$.0^{2}11$	.025	.067	.107	.140	.167	.189	.208	.223	.236	.248	.257	.025
	.05	$.0^{2}43$	.052	.111	.160	.198	.228	.252	.271	.287	.301	.313	.322	.05
	.10	.017	.108	.188	.247	.290	.322	.347	.367	.383	.397	.408	.418	.10
	.25	.113	.305	.415	.483	.528	.560	.584	.604	.618	.631	.641	.650	.25
	.50	.528	.799	.907	.965	1.00	1.02	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	.50
	.75	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	.75
	.90	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27	.90
	.95	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68	.95
	.975	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52	.975
	.99	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89	.99
	.995	22.8	18.3	16.5	15.6	14.9	14.5	14.2	14.0	13.8	13.6	13.5	13.4	.995
	.999	47.2	37.1	33.2	31.1	29.7	28.8	28.2	27.6	27.2	26.9	26.6	26.4	.999
	.9995	63.6	49.8	44.4	41.5	39.7	38.5	37.6	36.9	36.4	35.9	35.6	35.2	.9995
6	.0005	$.0^{6}43$	$.0^{3}50$	$.0^{2}47$	.014	.026	.039	.052	.064	.075	.085	.094	.103	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{2}10$	$.0^{2}75$	.020	.035	.050	.064	.078	.090	.101	.111	.119	.001
	.005	$.0^{4}43$	$.0^{2}50$	.022	.045	.069	.090	.109	.126	.140	.153	.164	.174	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.036	.066	.094	.118	.139	.157	.172	.186	.197	.207	.01
	.025	$.0^{2}11$	.025	.068	.109	.143	.172	.195	.215	.231	.246	.258	.268	.025
	.05	$.0^{2}43$	.052	.112	.162	.202	.233	.259	.279	.296	.311	.324	.334	.05
	.10	.017	.107	.189	.249	.294	.327	.354	.375	.392	.406	.418	.429	.10
	.25	.111	.302	.413	.481	.524	.561	.586	.606	.622	.635	.645	.654	.25
	.50	.515	.780	.886	.942	.977	1.00	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05	1.06	.50
	.75	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.77	.75
	.90	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90	.90
	.95	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	.95
	.975	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37	.975
	.99	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	.99
	.995	18.6	14.5	12.9	12.0	11.5	11.1	10.8	10.6	10.4	10.2	10.1	10.0	.995
	.999	35.5	27.0	23.7	21.9	20.8	20.0	19.5	19.0	18.7	18.4	18.2	18.0	.999
	.9995	46.1	34.8	30.4	28.1	26.6	25.6	24.9	24.3	23.9	23.5	23.2	23.0	.9995

تابع الجدول ٤ ج : النسب المئوية للتوزيع F .

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	.130	.157	.172	.188	.206	.217	.225	.242	.246	.255	.263	.268	.0005	7
.001	.148	.176	.191	.208	.225	.237	.245	.261	.266	.274	.282	.288	.001	
.005	.206	.235	.251	.267	.285	.296	.304	.319	.324	.332	.340	.345	.005	
.01	.241	.270	.286	.303	.320	.331	.339	.355	.358	.366	.373	.379	.01	
.025	.304	.333	.348	.364	.381	.392	.399	.413	.418	.426	.433	.437	.025	
.05	.369	.398	.413	.428	.445	.455	.461	.476	.479	.485	.493	.498	.05	
.10	.463	.491	.504	.519	.534	.543	.550	.562	.566	.571	.578	.582	.10	
.25	.679	.702	.713	.725	.737	.745	.749	.760	.762	.767	.772	.775	.25	
.50	1.05	1.07	1.07	1.08	1.08	1.09	1.09	1.10	1.10	1.10	1.10	1.10	.50	
.75	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	.75	
.90	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.52	2.51	2.50	2.49	2.48	2.48	2.47	.90	
.95	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.27	3.25	3.24	3.23	.95	
.975	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.28	4.25	4.21	4.20	4.18	4.16	4.14	.975	
.99	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.86	5.82	5.75	5.74	5.70	5.67	5.65	.99	
.995	7.97	7.75	7.65	7.53	7.42	7.35	7.31	7.22	7.19	7.15	7.10	7.08	.995	
.999	13.3	12.9	12.7	12.5	12.3	12.2	12.1	11.9	11.9	11.8	11.7	11.7	.999	
.9995	16.5	16.0	15.7	15.5	15.2	15.1	15.0	14.7	14.7	14.6	14.5	14.4	.9995	
.0005	.136	.164	.181	.198	.218	.230	.239	.257	.262	.271	.281	.287	.0005	8
.001	.155	.184	.200	.218	.238	.250	.259	.277	.282	.292	.300	.306	.001	
.005	.214	.244	.261	.279	.299	.311	.319	.337	.341	.351	.358	.364	.005	
.01	.250	.281	.297	.315	.334	.346	.354	.372	.376	.385	.392	.398	.01	
.025	.313	.343	.360	.377	.395	.407	.415	.431	.435	.442	.450	.456	.025	
.05	.379	.409	.425	.441	.459	.469	.477	.493	.496	.505	.510	.516	.05	
.10	.472	.500	.515	.531	.547	.556	.563	.578	.581	.588	.595	.599	.10	
.25	.684	.707	.718	.730	.743	.751	.756	.767	.769	.775	.780	.783	.25	
.50	1.04	1.05	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	1.09	1.09	1.09	.50	
.75	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.59	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	.75	
.90	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.32	2.31	2.30	2.29	.90	
.95	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.97	2.95	2.94	2.93	.95	
.975	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.81	3.78	3.74	3.73	3.70	3.68	3.67	.975	
.99	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.07	5.03	4.96	4.95	4.91	4.88	4.86	.99	
.995	6.81	6.61	6.50	6.40	6.29	6.22	6.18	6.09	6.06	6.02	5.98	5.95	.995	
.999	10.8	10.5	10.3	10.1	9.92	9.80	9.73	9.57	9.54	9.46	9.39	9.34	.999	
.9995	13.1	12.7	12.5	12.2	12.0	11.8	11.8	11.6	11.5	11.4	11.4	11.3	.9995	
.0005	.141	.171	.188	.207	.228	.242	.251	.270	.276	.287	.297	.303	.0005	9
.001	.160	.191	.208	.228	.249	.262	.271	.291	.296	.307	.316	.323	.001	
.005	.220	.253	.271	.290	.310	.324	.332	.351	.356	.366	.376	.382	.005	
.01	.257	.289	.307	.326	.346	.358	.368	.386	.391	.400	.410	.415	.01	
.025	.320	.352	.370	.388	.408	.420	.428	.446	.450	.459	.467	.473	.025	
.05	.386	.418	.435	.452	.471	.483	.490	.508	.510	.518	.526	.532	.05	
.10	.479	.509	.525	.541	.558	.568	.575	.588	.594	.602	.610	.613	.10	
.25	.687	.711	.723	.736	.749	.757	.762	.773	.776	.782	.787	.791	.25	
.50	1.03	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	1.08	1.08	1.08	.50	
.75	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	.75	
.90	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.22	2.21	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16	.90	
.95	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.76	2.75	2.73	2.72	2.71	.95	
.975	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.47	3.45	3.40	3.39	3.37	3.35	3.33	.975	
.99	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.48	4.42	4.40	4.36	4.33	4.31	.99	
.995	6.03	5.83	5.73	5.62	5.52	5.45	5.41	5.32	5.30	5.26	5.21	5.19	.995	
.999	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.26	8.19	8.04	8.00	7.93	7.86	7.81	.999	
.9995	11.0	10.6	10.4	10.2	9.94	9.80	9.71	9.53	9.49	9.40	9.32	9.26	.9995	

تابع الجدول ٤ جـ : النسب المئوية للتوزيع F .

ν_2	Cum. Prop.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
7	.0005	$.0^{6}42$	$.0^{3}50$	$.0^{2}48$	.014	.027	.040	.053	.066	.078	.088	.099	.108	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{2}10$	$.0^{2}76$	.020	.035	.051	.067	.081	.093	.105	.115	.125	.001
	.005	$.0^{4}42$	$.0^{2}50$	.023	.046	.070	.093	.113	.130	.145	.159	.171	.181	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.036	.067	.096	.121	.143	.162	.178	.192	.205	.216	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.068	.110	.146	.176	.200	.221	.238	.253	.266	.277	.025
	.05	$.0^{2}42$	.052	.113	.164	.205	.238	.264	.286	.304	.319	.332	.343	.05
	.10	.017	.107	.190	.251	.297	.332	.359	.381	.399	.414	.427	.438	.10
	.25	.110	.300	.412	.481	.528	.562	.588	.608	.624	.637	.649	.658	.25
	.50	.506	.767	.871	.926	.960	.983	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.04	.50
	.75	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.69	1.68	.75
	.90	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67	.90
	.95	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	.95
	.975	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67	.975
	.99	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	.99
	.995	16.2	12.4	10.9	10.0	9.52	9.16	8.89	8.68	8.51	8.38	8.27	8.18	.995
	.999	29.2	21.7	18.8	17.2	16.2	15.5	15.0	14.6	14.3	14.1	13.9	13.7	.999
	.9995	37.0	27.2	23.5	21.4	20.2	19.3	18.7	18.2	17.8	17.5	17.2	17.0	.9995
8	.0005	$.0^{6}42$	$.0^{3}50$	$.0^{2}48$	.014	.027	.041	.055	.068	.081	.092	.102	.112	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{2}10$	$.0^{2}76$	.020	.036	.053	.068	.083	.096	.109	.120	.130	.001
	.005	$.0^{4}42$	$.0^{2}50$	.027	.047	.072	.095	.115	.133	.149	.164	.176	.187	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.036	.068	.097	.123	.146	.166	.183	.198	.211	.222	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.069	.111	.148	.179	.204	.226	.244	.259	.273	.285	.025
	.05	$.0^{2}42$	.052	.113	.166	.208	.241	.268	.291	.310	.326	.339	.351	.05
	.10	.017	.107	.190	.253	.299	.335	.363	.386	.405	.421	.435	.445	.10
	.25	.109	.298	.411	.481	.529	.563	.589	.610	.627	.640	.654	.661	.25
	.50	.499	.757	.860	.915	.948	.971	.988	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03	.50
	.75	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.64	1.63	1.63	1.62	.75
	.90	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50	.90
	.95	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	.95
	.975	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20	.975
	.99	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	.99
	.995	14.7	11.0	9.60	8.81	8.30	7.95	7.69	7.50	7.34	7.21	7.10	7.01	.995
	.999	25.4	18.5	15.8	14.4	13.5	12.9	12.4	12.0	11.8	11.5	11.4	11.2	.999
	.9995	31.6	22.8	19.4	17.6	16.4	15.7	15.1	14.6	14.3	14.0	13.8	13.6	.9995
9	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{3}50$	$.0^{2}48$	.015	.027	.042	.056	.070	.083	.094	.105	.115	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{2}10$	$.0^{2}77$	.021	.037	.054	.070	.085	.099	.112	.123	.134	.001
	.005	$.0^{4}42$	$.0^{2}50$	.023	.047	.073	.096	.117	.136	.153	.168	.181	.192	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.037	.068	.098	.125	.149	.169	.187	.202	.216	.228	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.069	.112	.150	.181	.207	.230	.248	.265	.279	.291	.025
	.05	$.0^{2}40$	.052	.113	.167	.210	.244	.272	.296	.315	.331	.345	.358	.05
	.10	.017	.107	.191	.254	.302	.338	.367	.390	.410	.426	.441	.452	.10
	.25	.108	.297	.410	.480	.529	.564	.591	.612	.629	.643	.654	.664	.25
	.50	.494	.749	.852	.906	.939	.962	.978	.990	1.00	1.01	1.01	1.02	.50
	.75	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58	.75
	.90	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38	.90
	.95	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	.95
	.975	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87	.975
	.99	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	.99
	.995	13.6	10.1	8.72	7.96	7.47	7.13	6.88	6.69	6.54	6.42	6.31	6.23	.995
	.999	22.9	16.4	13.9	12.6	11.7	11.1	10.7	10.4	10.1	9.89	9.71	9.57	.999
	.9995	28.0	19.9	16.8	15.1	14.1	13.3	12.8	12.4	12.1	11.8	11.6	11.4	.9995

تابع الجدول ٤ ج النسب المئوية للتوزيع F .

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	.145	.177	.195	.215	.238	.251	.262	.282	.288	.299	.311	.319	.0005	10
.001	.164	.197	.216	.236	.258	.272	.282	.303	.309	.321	.331	.338	.001	
.005	.226	.260	.279	.299	.321	.334	.344	.365	.370	.380	.391	.397	.005	
.01	.263	.297	.316	.336	.357	.370	.380	.400	.405	.415	.424	.431	.01	
.025	.327	.360	.379	.398	.419	.431	.441	.459	.464	.474	.483	.488	.025	
.05	.393	.426	.444	.462	.481	.493	.502	.518	.523	.532	.541	.546	.05	
.10	.486	.516	.532	.549	.567	.578	.586	.602	.605	.614	.621	.625	.10	
.25	.691	.714	.727	.740	.754	.762	.767	.779	.782	.788	.793	.797	.25	
.50	1.02	1.03	1.04	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.07	1.07	1.07	.50	
.75	1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49	1.49	1.49	1.48	1.48	.75	
.90	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.12	2.11	2.09	2.08	2.07	2.06	2.06	.90	
.95	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.59	2.58	2.56	2.55	2.54	.95	
.975	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.22	3.20	3.15	3.14	3.12	3.09	3.08	.975	
.99	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.08	4.01	4.00	3.96	3.93	3.91	.99	
.995	5.47	5.27	5.17	5.07	4.97	4.90	4.86	4.77	4.75	4.71	4.67	4.64	.995	
.999	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.19	7.12	6.98	6.94	6.87	6.81	6.76	.999	
.9995	9.56	9.16	8.96	8.75	8.54	8.42	8.33	8.16	8.12	8.04	7.96	7.90	.9995	
.0005	.148	.182	.201	.222	.246	.261	.271	.293	.299	.312	.324	.331	.0005	11
.001	.168	.202	.222	.243	.266	.282	.292	.313	.320	.332	.343	.353	.001	
.005	.231	.266	.286	.308	.330	.345	.355	.376	.382	.394	.403	.412	.005	
.01	.268	.304	.324	.344	.366	.380	.391	.412	.417	.427	.439	.444	.01	
.025	.332	.368	.386	.407	.429	.442	.450	.472	.476	.485	.495	.503	.025	
.05	.398	.433	.452	.469	.490	.503	.513	.529	.535	.543	.552	.559	.05	
.10	.490	.524	.541	.559	.578	.588	.595	.614	.617	.625	.633	.637	.10	
.25	.694	.719	.730	.744	.758	.767	.773	.780	.788	.794	.799	.803	.25	
.50	1.02	1.03	1.03	1.04	1.05	1.05	1.05	1.06	1.06	1.06	1.06	1.06	.50	
.75	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.47	1.46	1.46	1.46	1.45	1.45	.75	
.90	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	2.00	1.99	1.98	1.97	.90	
.95	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.46	2.45	2.43	2.42	2.40	.95	
.975	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.03	3.00	2.96	2.94	2.92	2.90	2.88	.975	
.99	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.78	3.71	3.69	3.66	3.62	3.60	.99	
.995	5.05	4.86	4.76	4.65	4.55	4.49	4.45	4.36	4.34	4.29	4.25	4.23	.995	
.999	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.41	6.35	6.21	6.17	6.10	6.04	6.00	.999	
.9995	8.52	8.14	7.94	7.75	7.55	7.43	7.35	7.18	7.14	7.06	6.98	6.93	.9995	
.0005	.152	.186	.206	.228	.253	.269	.280	.305	.311	.323	.337	.345	.0005	12
.001	.172	.207	.228	.250	.275	.291	.302	.326	.332	.344	.357	.365	.001	
.005	.235	.272	.292	.315	.339	.355	.365	.388	.393	.405	.417	.424	.005	
.01	.273	.310	.330	.352	.375	.391	.401	.422	.428	.441	.450	.458	.01	
.025	.337	.374	.394	.416	.437	.450	.461	.481	.487	.498	.508	.514	.025	
.05	.404	.439	.458	.478	.499	.513	.522	.541	.545	.556	.565	.571	.05	
.10	.496	.528	.546	.564	.583	.595	.604	.621	.625	.633	.641	.647	.10	
.25	.695	.721	.734	.748	.762	.771	.777	.789	.792	.799	.804	.808	.25	
.50	1.01	1.02	1.03	1.03	1.04	1.04	1.05	1.05	1.05	1.05	1.06	1.06	.50	
.75	1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.44	1.43	1.43	1.43	1.42	1.42	.75	
.90	2.11	2.06	2.04	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	.90	
.95	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.35	2.34	2.32	2.31	2.30	.95	
.975	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.87	2.85	2.80	2.79	2.76	2.74	2.72	.975	
.99	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.54	3.47	3.45	3.41	3.38	3.36	.99	
.995	4.72	4.53	4.43	4.33	4.23	4.17	4.12	4.04	4.01	3.97	3.93	3.90	.995	
.999	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.83	5.76	5.63	5.59	5.52	5.46	5.42	.999	
.9995	7.74	7.37	7.18	7.00	6.80	6.68	6.61	6.45	6.41	6.33	6.25	6.20	.9995	

تابع الجدول ٤ ج : النسب المئوية للتوزيع F .

ν_2	ν_1 / Cum. Prop.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
10	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{3}50$	$.0^{2}49$	.015	.028	.043	.057	.071	.085	.097	.108	.119	.0005
	.001	$.0^{5}17$	$.0^{2}10$	$.0^{2}77$	.021	.037	.054	.071	.087	.101	.114	.126	.137	.001
	.005	$.0^{4}41$	$.0^{2}50$	.023	.048	.073	.098	.119	.139	.156	.171	.185	.197	.005
	.01	$.0^{3}17$	.010	.037	.069	.100	.127	.151	.172	.190	.206	.220	.233	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.069	.113	.151	.183	.210	.233	.252	.269	.283	.296	.025
	.05	$.0^{2}41$	.052	.114	.168	.211	.246	.275	.299	.319	.336	.351	.363	.05
	.10	.017	.106	.191	.255	.303	.340	.370	.394	.414	.430	.444	.457	.10
	.25	.107	.296	.409	.480	.529	.565	.592	.613	.631	.645	.657	.667	.25
	.50	.490	.743	.845	.899	.932	.954	.971	.983	.992	1.00	1.01	1.01	.50
	.75	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54	.75
	.90	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28	.90
	.95	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	.95
	.975	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	.975
	.99	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	.99
	.995	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.75	5.66	.995
	.999	21.0	14.9	12.6	11.3	10.5	9.92	9.52	9.20	8.96	8.75	8.58	8.44	.999
	.9995	25.5	17.9	15.0	13.4	12.4	11.8	11.3	10.9	10.6	10.3	10.1	9.93	.9995
11	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{3}50$	$.0^{2}49$	.015	.028	.043	.058	.072	.086	.099	.111	.121	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}78$	.021	.038	.055	.072	.088	.103	.116	.129	.140	.001
	.005	$.0^{4}40$	$.0^{2}50$	.023	.048	.074	.099	.121	.141	.158	.174	.188	.200	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.069	.100	.128	.153	.175	.193	.210	.224	.237	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.069	.114	.152	.185	.212	.236	.256	.273	.288	.301	.025
	.05	$.0^{2}41$	.052	.114	.168	.212	.248	.278	.302	.323	.340	.355	.368	.05
	.10	.017	.106	.192	.256	.305	.342	.373	.397	.417	.435	.448	.461	.10
	.25	.107	.295	.408	.481	.529	.565	.592	.614	.633	.645	.658	.667	.25
	.50	.486	.739	.840	.893	.926	.948	.964	.977	.986	.994	1.00	1.01	.50
	.75	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.52	1.51	.75
	.90	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	.90
	.95	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	.95
	.975	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	.975
	.99	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	.99
	.995	12.2	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.32	5.24	.995
	.999	19.7	13.8	11.6	10.3	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.76	7.62	.999
	.9995	23.6	16.4	13.6	12.2	11.2	10.6	10.1	9.76	9.48	9.24	9.04	8.88	.9995
12	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{3}50$	$.0^{2}49$	.015	.028	.044	.058	.073	.087	.101	.113	.124	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}78$	.021	.038	.056	.073	.089	.104	.118	.131	.143	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.023	.048	.075	.100	.122	.143	.161	.177	.191	.204	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.070	.101	.130	.155	.176	.196	.212	.227	.241	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.070	.114	.153	.186	.214	.238	.259	.276	.292	.305	.025
	.05	$.0^{2}41$	.052	.114	.169	.214	.250	.280	.305	.325	.343	.358	.372	.05
	.10	.016	.106	.192	.257	.306	.344	.375	.400	.420	.438	.452	.466	.10
	.25	.106	.295	.408	.480	.530	.566	.594	.616	.633	.649	.662	.671	.25
	.50	.484	.735	.835	.888	.921	.943	.959	.972	.981	.989	.995	1.00	.50
	.75	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49	.75
	.90	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15	.90
	.95	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	.95
	.975	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	.975
	.99	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	.99
	.995	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.99	4.91	.995
	.999	18.6	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.14	7.01	.999
	.9995	22.2	15.3	12.7	11.2	10.4	9.74	9.28	8.94	8.66	8.43	8.24	8.08	.9995

تابع الجدول ٤ ج : النسب المئوية للتوزيع F

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	.159	.197	.220	.244	.272	.290	.303	.330	.339	.353	.368	.377	.0005	**15**
.001	.181	.219	.242	.266	.294	.313	.325	.352	.360	.375	.388	.398	.001	
.005	.246	.286	.308	.333	.360	.377	.389	.415	.422	.435	.448	.457	.005	
.01	.284	.324	.346	.370	.397	.413	.425	.450	.456	.469	.483	.490	.01	
.025	.349	.389	.410	.433	.458	.474	.485	.508	.514	.526	.538	.546	.025	
.05	.416	.454	.474	.496	.519	.535	.545	.565	.571	.581	.592	.600	.05	
.10	.507	.542	.561	.581	.602	.614	.624	.641	.647	.658	.667	.672	.10	
.25	.701	.728	.742	.757	.772	.782	.788	.802	.805	.812	.818	.822	.25	
.50	1.00	1.01	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04	1.04	1.05	.50	
.75	1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	.75	
.90	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.79	1.77	1.76	1.76	.90	
.95	2.40	2.33	2.39	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	.95	
.975	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.55	2.52	2.47	2.46	2.44	2.41	2.40	.975	
.99	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.05	2.98	2.96	2.92	2.89	2.87	.99	
.995	4.07	3.88	3.79	3.69	3.59	3.52	3.48	3.39	3.37	3.33	3.29	3.26	.995	
.999	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.70	4.64	4.51	4.47	4.41	4.35	4.31	.999	
.9995	6.27	5.93	5.75	5.58	5.40	5.29	5.21	5.06	5.02	4.94	4.87	4.83	.9995	
.0005	.169	.211	.235	.263	.295	.316	.331	.364	.375	.391	.408	.422	.0005	**20**
.001	.191	.233	.258	.286	.318	.339	.354	.386	.395	.413	.429	.441	.001	
.005	.258	.301	.327	.354	.385	.405	.419	.448	.457	.474	.490	.500	.005	
.01	.297	.340	.365	.392	.422	.441	.455	.483	.491	.508	.521	.532	.01	
.025	.363	.406	.430	.456	.484	.503	.514	.541	.548	.562	.575	.585	.025	
.05	.430	.471	.493	.518	.544	.562	.572	.595	.603	.617	.629	.637	.05	
.10	.520	.557	.578	.600	.623	.637	.648	.671	.675	.685	.694	.704	.10	
.25	.708	.736	.751	.767	.784	.794	.801	.816	.820	.827	.835	.840	.25	
.50	.989	1.00	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	.50	
.75	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	.75	
.90	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	.90	
.95	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	.95	
.975	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.25	2.22	2.17	2.16	2.13	2.10	2.09	.975	
.99	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.54	2.52	2.48	2.44	2.42	.99	
.995	3.50	3.32	3.22	3.12	3.02	2.96	2.92	2.83	2.81	2.76	2.72	2.69	.995	
.999	4.56	4.29	4.15	4.01	3.86	3.77	3.70	3.58	3.54	3.48	3.42	3.38	.999	
.9995	5.07	4.75	4.58	4.42	4.24	4.15	4.07	3.93	3.90	3.82	3.75	3.70	.9995	
.0005	.174	.218	.244	.274	.309	.331	.349	.384	.395	.416	.434	.449	.0005	**24**
.001	.196	.241	.268	.298	.332	.354	.371	.405	.417	.437	.455	.469	.001	
.005	.264	.310	.337	.367	.400	.422	.437	.469	.479	.498	.515	.527	.005	
.01	.304	.350	.376	.405	.437	.459	.473	.505	.513	.529	.546	.558	.01	
.025	.370	.415	.441	.468	.498	.518	.531	.562	.568	.585	.599	.610	.025	
.05	.437	.480	.504	.530	.558	.575	.588	.613	.622	.637	.649	.659	.05	
.10	.527	.566	.588	.611	.635	.651	.662	.685	.691	.704	.715	.723	.10	
.25	.712	.741	.757	.773	.791	.802	.809	.825	.829	.837	.844	.850	.25	
.50	.983	.994	1.00	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	.50	
.75	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27	1.27	1.26	.75	
.90	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53	.90	
.95	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73	.95	
.975	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.11	2.08	2.02	2.01	1.98	1.95	1.94	.975	
.99	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21	.99	
.995	3.25	3.06	2.97	2.87	2.77	2.70	2.66	2.57	2.55	2.50	2.46	2.43	.995	
.999	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.35	3.29	3.16	3.14	3.07	3.01	2.97	.999	
.9995	4.55	4.25	4.09	3.93	3.76	3.66	3.59	3.44	3.41	3.33	3.27	3.22	.9995	

تابع الجدول ٤ ج : النسب المئوية للتوزيع F .

ν_2	Cum. Prop. \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
15	.0005	$.0^{6}41$	$.0^{3}50$	$.0^{2}49$	.015	.029	.045	.061	.076	.091	.105	.117	.129	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.021	.039	.057	.075	.092	.108	.123	.137	.149	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.023	.049	.076	.102	.125	.147	.166	.183	.198	.212	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.070	.103	.132	.158	.181	.202	.219	.235	.249	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.070	.116	.156	.190	.219	.244	.265	.284	.300	.315	.025
	.05	$.0^{2}41$	.051	.115	.170	.216	.254	.285	.311	.333	.351	.368	.382	.05
	.10	.016	.106	.192	.258	.309	.348	.380	.406	.427	.446	.461	.475	.10
	.25	.105	.293	.407	.480	.531	.568	.596	.618	.637	.652	.667	.676	.25
	.50	.478	.726	.826	.878	.911	.933	.948	.960	.970	.977	.984	.989	.50
	.75	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.44	.75
	.90	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02	.90
	.95	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	.95
	.975	6.20	4.76	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96	.975
	.99	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	.99
	.995	10.8	7.70	6.48	5.80	5.37	5.07	4.85	4.67	4.54	4.42	4.33	4.25	.995
	.999	16.6	11.3	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.93	5.81	.999
	.9995	19.5	13.2	10.8	9.48	8.66	8.10	7.68	7.36	7.11	6.91	6.75	6.60	.9995
20	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}50$	.015	.029	.046	.063	.079	.094	.109	.123	.136	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.022	.039	.058	.077	.095	.112	.128	.143	.156	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.023	.050	.077	.104	.129	.151	.171	.190	.206	.221	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.037	.071	.105	.135	.162	.187	.208	.227	.244	.259	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.071	.117	.158	.193	.224	.250	.273	.292	.310	.325	.025
	.05	$.0^{2}40$	.051	.115	.172	.219	.258	.290	.318	.340	.360	.377	.393	.05
	.10	.016	.106	.193	.260	.312	.353	.385	.412	.435	.454	.472	.485	.10
	.25	.104	.292	.407	.480	.531	.569	.598	.622	.641	.656	.671	.681	.25
	.50	.472	.718	.816	.868	.900	.922	.938	.950	.959	.966	.972	.977	.50
	.75	1.40	1.49	1.48	1.47	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	.75
	.90	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.91	1.89	.90
	.95	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	.95
	.975	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68	.975
	.99	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	.99
	.995	9.94	6.99	5.82	5.17	4.76	4.47	4.26	4.09	3.96	3.85	3.76	3.68	.995
	.999	14.8	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.94	4.82	.999
	.9995	17.2	11.4	9.20	8.02	7.28	6.76	6.38	6.08	5.85	5.66	5.51	5.38	.9995
24	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}50$	.015	.030	.046	.064	.080	.096	.112	.126	.139	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}79$	.022	.040	.059	.079	.097	.115	.131	.146	.160	.001
	.005	$.0^{4}40$	$.0^{2}50$	.023	.050	.078	.106	.131	.154	.175	.193	.210	.226	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.038	.072	.106	.137	.165	.189	.211	.231	.249	.264	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.071	.117	.159	.195	.227	.253	.277	.297	.315	.331	.025
	.05	$.0^{2}40$	.051	.116	.173	.221	.260	.293	.321	.345	.365	.383	.399	.05
	.10	.016	.106	.193	.261	.313	.355	.388	.416	.439	.459	.476	.491	.10
	.25	.104	.291	.406	.480	.532	.570	.600	.623	.643	.659	.671	.684	.25
	.50	.469	.714	.812	.863	.895	.917	.932	.944	.953	.961	.967	.972	.50
	.75	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.37	1.36	.75
	.90	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83	.90
	.95	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18	.95
	.975	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54	.975
	.99	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	.99
	.995	9.55	6.66	5.52	4.89	4.49	4.20	3.99	3.83	3.69	3.59	3.50	3.42	.995
	.999	14.0	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.50	4.39	.999
	.9995	16.2	10.6	8.52	7.39	6.68	6.18	5.82	5.54	5.31	5.13	4.98	4.85	.9995

تابع الجدول ٤ ج : النسب المئوية للتوزيع F .

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	.179	.226	.254	.287	.325	.350	.369	.410	.420	.444	.467	.483	.0005	**30**
.001	.202	.250	.278	.311	.348	.373	.391	.431	.442	.465	.488	.503	.001	
.005	.271	.320	.349	.381	.416	.441	.457	.495	.504	.524	.543	.559	.005	
.01	.311	.360	.388	.419	.454	.476	.493	.529	.538	.559	.575	.590	.01	
.025	.378	.426	.453	.482	.515	.535	.551	.585	.592	.610	.625	.639	.025	
.05	.445	.490	.516	.543	.573	.592	.606	.637	.644	.658	.676	.685	.05	
.10	.534	.575	.598	.623	.649	.667	.678	.704	.710	.725	.735	.746	.10	
.25	.716	.746	.763	.780	.798	.810	.818	.835	.839	.848	.856	.862	.25	
.50	.978	.989	.994	1.00	1.01	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	.50	
.75	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.26	1.25	1.24	1.24	1.23	1.23	.75	
.90	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.55	1.54	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	.90	
.95	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62	.95	
.975	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.97	1.94	1.88	1.87	1.84	1.81	1.79	.975	
.99	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.25	2.21	2.13	2.11	2.07	2.03	2.01	.99	
.995	3.01	2.82	2.73	2.63	2.52	2.46	2.42	2.32	2.30	2.25	2.21	2.18	.995	
.999	3.75	3.49	3.36	3.22	3.07	2.98	2.92	2.79	2.76	2.69	2.63	2.59	.999	
.9995	4.10	3.80	3.65	3.48	3.32	3.22	3.15	3.00	2.97	2.89	2.82	2.78	.9995	
.0005	.185	.236	.266	.301	.343	.373	.393	.441	.453	.480	.504	.525	.0005	**40**
.001	.209	.259	.290	.326	.367	.396	.415	.461	.473	.500	.524	.545	.001	
.005	.279	.331	.362	.396	.436	.463	.481	.524	.534	.559	.581	.599	.005	
.01	.319	.371	.401	.435	.473	.498	.516	.556	.567	.592	.613	.628	.01	
.025	.387	.437	.466	.498	.533	.556	.573	.610	620	.641	.662	.674	.025	
.05	.454	.502	.529	.558	.591	.613	.627	.658	.669	.685	.704	.717	.05	
.10	.542	.585	.609	.636	.664	.683	.696	.724	.731	.747	.762	.772	.10	
.25	.720	.752	.769	.787	.806	.819	.828	.846	.851	.861	.870	.877	.25	
.50	.972	.983	.989	.994	1.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.02	1.02	.50	
.75	1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.23	1.22	1.21	1.21	1.20	1.19	1.19	.75	
.90	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	.90	
.95	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.59	1.58	1.55	1.53	1.51	.95	
.975	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.83	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.64	.975	
.99	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.06	2.02	1.94	1.92	1.87	1.83	1.80	.99	
.995	2.78	2.60	2.50	2.40	2.30	2.23	2.18	2.09	2.06	2.01	1.96	1.93	.995	
.999	3.40	3.15	3.01	2.87	2.73	2.64	2.57	2.44	2.41	2.34	2.28	2.23	.999	
.9995	3.68	3.39	3.24	3.08	2.92	2.82	2.74	2.60	2.57	2.49	2.41	2.37	.9995	
.0005	.192	.246	.278	.318	.365	.398	.421	.478	.493	.527	.561	.585	.0005	**60**
.001	.216	.270	.304	.343	.389	.421	.444	.497	.512	.545	.579	.602	.001	
.005	.287	.343	.376	.414	.458	.488	.510	.559	.572	.602	.633	.652	.005	
.01	.328	.383	.416	.453	.495	.524	.545	.592	.604	.633	.658	.679	.01	
.025	.396	.450	.481	.515	.555	.581	.600	.641	.654	.680	.704	.720	.025	
.05	.463	.514	.543	.575	.611	.633	.652	.690	.700	.719	.746	.759	.05	
.10	.550	.596	.622	.650	.682	.703	.717	.750	.758	.776	.793	.806	.10	
.25	.725	.758	.776	.796	.816	.830	.840	.860	.865	.877	.888	.896	.25	
.50	.967	.978	.983	.989	.994	.998	1.00	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	.50	
.75	1.27	1.25	1.24	1.22	1.21	1.20	1.19	1.17	1.17	1.16	1.15	1.15	.75	
.90	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.41	1.40	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	.90	
.95	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.48	1.47	1.44	1.41	1.39	.95	
.975	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.70	1.67	1.60	1.58	1.54	1.51	1.48	.975	
.99	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.88	1.84	1.75	1.73	1.68	1.63	1.60	.99	
.995	2.57	2.39	2.29	2.19	2.08	2.01	1.96	1.86	1.83	1.78	1.73	1.69	.995	
.999	3.08	2.83	2.69	2.56	2.41	2.31	2.25	2.11	2.09	2.01	1.93	1.89	.999	
.9995	3.30	3.02	2.87	2.71	2.55	2.45	2.38	2.23	2.19	2.11	2.03	1.98	.9995	

تابع الجدول ٤ ج: النسب المئوية للتوزيع F .

ν_2	ν_1 / Cum. Prop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
30	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}50$	.015	.030	.047	.065	.082	.098	.114	.129	.143	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}80$	.022	.040	.060	.080	.099	.117	.134	.150	.164	.001
	.005	$.0^{4}40$	$.0^{2}50$	.024	.050	.079	.107	.133	.156	.178	.197	.215	.231	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.038	.072	.107	.138	.167	.192	.215	.235	.254	.270	.01
	.025	$.0^{2}10$	.025	.071	.118	.161	.197	.229	.257	.281	.302	.321	.337	.025
	.05	$.0^{2}40$	.051	.116	.174	.222	.263	.296	.325	.349	.370	.389	.406	.05
	.10	.016	.106	.193	.262	.315	.357	.391	.420	.443	.464	.481	.497	.10
	.25	.103	.290	.406	.480	.532	.571	.601	.625	.645	.661	.676	.688	.25
	.50	.466	.709	.807	.858	.890	.912	.927	.939	.948	.955	.961	.966	.50
	.75	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34	.75
	.90	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79	1.77	.90
	.95	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	.95
	.975	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41	.975
	.99	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	.99
	.995	9.18	6.35	5.24	4.62	4.23	3.95	3.74	3.58	3.45	3.34	3.25	3.18	.995
	.999	13.3	8.77	7.05	6.12	5.53	5.12	4.82	4.58	4.39	4.24	4.11	4.00	.999
	.9995	15.2	9.90	7.90	6.82	6.14	5.66	5.31	5.04	4.82	4.65	4.51	4.38	.9995
40	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}50$	.016	.030	.048	.066	.084	.100	.117	.132	.147	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}80$	.022	.042	.061	.081	.101	.119	.137	.153	.169	.001
	.005	$.0^{4}40$	$.0^{2}50$	.024	.051	.080	.108	.135	.159	.181	.201	.220	.237	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.038	.073	.108	.140	.169	.195	.219	.240	.259	.276	.01
	.025	$.0^{3}99$	.025	.071	.119	.162	.199	.232	.260	.285	.307	.327	.344	.025
	.05	$.0^{2}40$	.051	.116	.175	.224	.265	.299	.329	.354	.376	.395	.412	.05
	.10	.016	.106	.194	.263	.317	.360	.394	.424	.448	.469	.488	.504	.10
	.25	.103	.290	.405	.480	.533	.572	.603	.627	.647	.664	.680	.691	.25
	.50	.463	.705	.802	.854	.885	.907	.922	.934	.943	.950	.956	.961	.50
	.75	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	.75
	.90	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.73	1.71	.90
	.95	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	.95
	.975	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.33	2.29	.975
	.99	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	.99
	.995	8.83	6.07	4.98	4.37	3.99	3.71	3.51	3.35	3.22	3.12	3.03	2.95	.995
	.999	12.6	8.25	6.60	5.70	5.13	4.73	4.44	4.21	4.02	3.87	3.75	3.64	.999
	.9995	14.4	9.25	7.33	6.30	5.64	5.19	4.85	4.59	4.38	4.21	4.07	3.95	.9995
60	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}51$	.016	.031	.048	.067	.085	.103	.120	.136	.152	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}80$	.022	.041	.062	.083	.103	.122	.140	.157	.174	.001
	.005	$.0^{4}40$	$.0^{2}50$	.024	.051	.081	.110	.137	.162	.185	.206	.225	.243	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.038	.073	.109	.142	.172	.199	.223	.245	.265	.283	.01
	.025	$.0^{3}99$	.025	.071	.120	.163	.202	.235	.264	.290	.313	.333	.351	.025
	.05	$.0^{2}40$	.051	.116	.176	.226	.267	.303	.333	.359	.382	.402	.419	.05
	.10	.016	.106	.194	.264	.318	.362	.398	.428	.453	.475	.493	.510	.10
	.25	.102	.289	.405	.480	.534	.573	.604	.629	.650	.667	.680	.695	.25
	.50	.461	.701	.798	.849	.880	.901	.917	.928	.937	.945	.951	.956	.50
	.75	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	.75
	.90	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.68	1.66	.90
	.95	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	.95
	.975	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.22	2.17	.975
	.99	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	.99
	.995	8.49	5.80	4.73	4.14	3.76	3.49	3.29	3.13	3.01	2.90	2.82	2.74	.995
	.999	12.0	7.76	6.17	5.31	4.76	4.37	4.09	3.87	3.69	3.54	3.43	3.31	.999
	.9995	13.6	8.65	6.81	5.82	5.20	4.76	4.44	4.18	3.98	3.82	3.69	3.57	.9995

تابع الجدول ٤ جـ : النسب المئوية للتوزيع F .

Cum. Prop. \ ν_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	Cum. Prop.	ν_2
.0005	.199	.256	.293	.338	.390	.429	.458	.524	.543	.578	.614	.676	.0005	**120**
.001	.223	.282	.319	.363	.415	.453	.480	.542	.568	.595	.631	.691	.001	
.005	.297	.356	.393	.434	.484	.520	.545	.605	.623	.661	.702	.733	.005	
.01	.338	.397	.433	.474	.522	.556	.579	.636	.652	.688	.725	.755	.01	
.025	.406	.464	.498	.536	.580	.611	.633	.684	.698	.729	.762	.789	.025	
.05	.473	.527	.559	.594	.634	.661	.682	.727	.740	.767	.785	.819	.05	
.10	.560	.609	.636	.667	.702	.726	.742	.781	.791	.815	.838	.855	.10	
.25	.730	.765	.784	.805	.828	.843	.853	.877	.884	.897	.911	.923	.25	
.50	.961	.972	.978	.983	.989	.992	.994	1.00	1.00	1.00	1.01	1.01	.50	
.75	1.24	1.22	1.21	1.19	1.18	1.17	1.16	1.14	1.13	1.12	1.11	1.10	.75	
.90	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.34	1.32	1.27	1.26	1.24	1.21	1.19	.90	
.95	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.37	1.35	1.32	1.28	1.25	.95	
.975	1.95	1.82	1.76	1.69	1.61	1.56	1.53	1.45	1.43	1.39	1.34	1.31	.975	
.99	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.70	1.66	1.56	1.53	1.48	1.42	1.38	.99	
.995	2.37	2.19	2.09	1.98	1.87	1.80	1.75	1.64	1.61	1.54	1.48	1.43	.995	
.999	2.78	2.53	2.40	2.26	2.11	2.02	1.95	1.82	1.76	1.70	1.62	1.54	.999	
.9995	2.96	2.67	2.53	2.38	2.21	2.11	2.01	1.88	1.84	1.75	1.67	1.60	.9995	
.0005	.207	.270	.311	.360	.422	.469	.505	.599	.624	.704	.804	1.00	.0005	∞
.001	.232	.296	.338	.386	.448	.493	.527	.617	.649	.719	.819	1.00	.001	
.005	.307	.372	.412	.460	.518	.559	.592	.671	.699	.762	.843	1.00	.005	
.01	.349	.413	.452	.499	.554	.595	.625	.699	.724	.782	.858	1.00	.01	
.025	.418	.480	.517	.560	.611	.645	.675	.741	.763	.813	.878	1.00	.025	
.05	.484	.543	.577	.617	.663	.694	.720	.781	.797	.840	.896	1.00	.05	
.10	.570	.622	.652	.687	.726	.752	.774	.826	.838	.877	.919	1.00	.10	
.25	.736	.773	.793	.816	.842	.860	.872	.901	.910	.932	.957	1.00	.25	
.50	.956	.967	.972	.978	.983	.987	.989	.993	.994	.997	.999	1.00	.50	
.75	1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.13	1.12	1.09	1.08	1.07	1.04	1.00	.75	
.90	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.26	1.24	1.18	1.17	1.13	1.08	1.00	.90	
.95	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.17	1.11	1.00	.95	
.975	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.43	1.39	1.30	1.27	1.21	1.13	1.00	.975	
.99	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.52	1.47	1.36	1.32	1.25	1.15	1.00	.99	
.995	2.19	2.00	1.90	1.79	1.67	1.59	1.53	1.40	1.36	1.28	1.17	1.00	.995	
.999	2.51	2.27	2.13	1.99	1.84	1.73	1.66	1.49	1.45	1.34	1.21	1.00	.999	
.9995	2.65	2.37	2.22	2.07	1.91	1.79	1.71	1.53	1.48	1.36	1.22	1.00	.9995	

تابع الجدول ٤ جـ : النسب المئوية للتوزيع F .

ν_2	Cum. Prop. \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Cum. Prop.
120	.0005	$.0^{6}40$	$.0^{3}50$	$.0^{2}51$	.016	.031	.049	.067	.087	.105	.123	.140	.156	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}81$	.023	.042	.063	.084	.105	.125	.144	.162	.179	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.024	.051	.081	.111	.139	.165	.189	.211	.230	.249	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.038	.074	.110	.143	.174	.202	.227	.250	.271	.290	.01
	.025	$.0^{3}99$	.025	.072	.120	.165	.204	.238	.268	.295	.318	.340	.359	.025
	.05	$.0^{2}39$	.051	.117	.177	.227	.270	.306	.337	.364	.388	.408	.427	.05
	.10	.016	.105	.194	.265	.320	.365	.401	.432	.458	.480	.500	.518	.10
	.25	.102	.288	.405	.481	.534	.574	.606	.631	.652	.670	.685	.699	.25
	.50	.458	.697	.793	.844	.875	.896	.912	.923	.932	.939	.945	.950	.50
	.75	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	.75
	.90	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60	.90
	.95	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83	.95
	.975	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.10	2.05	.975
	.99	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34	.99
	.995	8.18	5.54	4.50	3.92	3.55	3.28	3.09	2.93	2.81	2.71	2.62	2.54	.995
	.999	11.4	7.32	5.79	4.95	4.42	4.04	3.77	3.55	3.38	3.24	3.12	3.02	.999
	.9995	12.8	8.10	6.34	5.39	4.79	4.37	4.07	3.82	3.63	3.47	3.34	3.22	.9995
∞	.0005	$.0^{6}39$	$.0^{3}50$	$.0^{2}51$	.016	.032	.050	.069	.088	.108	.127	.144	.161	.0005
	.001	$.0^{5}16$	$.0^{2}10$	$.0^{2}81$	.023	.042	.063	.085	.107	.128	.148	.167	.185	.001
	.005	$.0^{4}39$	$.0^{2}50$	.024	.052	.082	.113	.141	.168	.193	.216	.236	.256	.005
	.01	$.0^{3}16$	.010	.038	.074	.111	.145	.177	.206	.232	.256	.278	.298	.01
	.025	$.0^{3}98$	.025	.072	.121	.166	.206	.241	.272	.300	.325	.347	.367	.025
	.05	$.0^{2}39$	.051	.117	.178	.229	.273	.310	.342	.369	.394	.417	.436	.05
	.10	.016	.105	.195	.266	.322	.367	.405	.436	.463	.487	.508	.525	.10
	.25	.102	.288	.404	.481	.535	.576	.608	.634	.655	.674	.690	.703	.25
	.50	.455	.693	.789	.839	.870	.891	.907	.918	.927	.934	.939	.945	.50
	.75	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.24	.75
	.90	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.57	1.55	.90
	.95	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	.95
	.975	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.99	1.94	.975
	.99	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18	.99
	.995	7.88	5.30	4.28	3.72	3.35	3.09	2.90	2.74	2.62	2.52	2.43	2.36	.995
	.999	10.8	6.91	5.42	4.62	4.10	3.74	3.47	3.27	3.10	2.96	2.84	2.74	.999
	.9995	12.1	7.60	5.91	5.00	4.42	4.02	3.72	3.48	3.30	3.14	3.02	2.90	.9995

12	.01	.02	.18	.42	.64	.82	.98	1.12	1.24	1.35	1.44	1.53	1.60	1.65	1.73	1.77	1.84	1.88	1.92	1.96
	.05	.09	.43	.75	1.01	1.21	1.38	1.53	1.65	1.76	1.85	1.93	2.01	2.08	2.14	2.20	2.26	2.30	2.34	2.38
	.95	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40	5.51	5.62	5.71	5.80	5.88	5.95	6.03	6.09	6.15	6.21
	.99	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	.01	.02	.18	.42	.64	.83	.98	1.13	1.25	1.36	1.45	1.54	1.61	1.66	1.74	1.79	1.85	1.89	1.94	1.98
	.05	.09	.43	.75	1.01	1.22	1.39	1.53	1.65	1.76	1.86	1.94	2.02	2.09	2.15	2.21	2.27	2.31	2.36	2.40
	.95	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	6.00	6.05	6.11
	.99	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.34	7.42	7.48	7.55
14	.01	.02	.18	.42	.65	.83	.99	1.13	1.25	1.37	1.46	1.55	1.62	1.68	1.76	1.80	1.87	1.91	1.95	2.00
	.05	.09	.43	.75	1.01	1.22	1.39	1.54	1.66	1.77	1.86	1.95	2.03	2.10	2.16	2.22	2.28	2.32	2.37	2.41
	.95	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.72	5.79	5.85	5.92	5.97	6.03
	.99	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.12	7.20	7.27	7.33	7.39
15	.01	.02	.18	.42	.65	.83	.99	1.14	1.26	1.37	1.46	1.55	1.63	1.69	1.76	1.81	1.88	1.92	1.97	2.01
	.05	.09	.43	.75	1.01	1.22	1.39	1.54	1.66	1.77	1.87	1.95	2.03	2.11	2.17	2.23	2.29	2.34	2.38	2.43
	.95	3.01	3.67	4.08	4.37	4.60	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.58	5.65	5.72	5.79	5.85	5.90	5.96
	.99	4.17	4.83	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	.01	.02	.18	.42	.65	.83	.99	1.14	1.26	1.37	1.47	1.56	1.63	1.70	1.77	1.82	1.89	1.93	1.98	2.02
	.05	.09	.43	.75	1.01	1.22	1.39	1.54	1.67	1.78	1.87	1.96	2.04	2.11	2.18	2.24	2.30	2.34	2.39	2.44
	.95	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.72	5.79	5.84	5.90
	.99	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	.01	.02	.18	.42	.65	.84	1.00	1.14	1.27	1.38	1.48	1.57	1.64	1.70	1.78	1.83	1.90	1.94	1.99	2.04
	.05	.09	.43	.75	1.01	1.22	1.40	1.55	1.67	1.78	1.88	1.97	2.05	2.12	2.19	2.25	2.30	2.35	2.40	2.45
	.95	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.71	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.55	5.61	5.68	5.74	5.79	5.84
	.99	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.80	6.87	6.94	7.00	7.05
18	.01	.02	.18	.42	.65	.84	1.00	1.15	1.27	1.38	1.48	1.57	1.65	1.71	1.79	1.84	1.91	1.95	2.00	2.05
	.05	.09	.43	.75	1.02	1.22	1.40	1.55	1.67	1.79	1.88	1.97	2.05	2.12	2.19	2.25	2.31	2.36	2.41	2.45
	.95	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
	.99	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.72	6.79	6.85	6.91	6.96
19	.01	.02	.18	.43	.65	.84	1.00	1.15	1.28	1.39	1.48	1.58	1.65	1.72	1.80	1.85	1.91	1.96	2.01	2.06
	.05	.09	.43	.75	1.02	1.23	1.40	1.55	1.68	1.79	1.89	1.98	2.05	2.13	2.20	2.26	2.32	2.37	2.42	2.46
	.95	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.32	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
	.99	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	.01	.02	.18	.43	.65	.84	1.01	1.15	1.28	1.39	1.49	1.58	1.66	1.72	1.80	1.85	1.92	1.97	2.01	2.06
	.05	.09	.43	.75	1.02	1.23	1.40	1.55	1.68	1.79	1.89	1.98	2.06	2.13	2.20	2.27	2.32	2.37	2.42	2.47
	.95	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
	.99	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.29	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.76	6.82

الجدول ٥ : النسب المئوية لتوزيع $g = w/s$ حيث w. مدى k من الملاحظات ، ν عدد درجات الحرية الموافق للانحراف المعياري s المستقل عن w.

ν	cum. prop. \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	.95	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1	50.6	52.0	53.2	54.3	55.4	56.3	57.2	58.0	58.8	59.6
	.99	90.0	135	164	186	202	216	227	237	246	253	260	266	272	277	282	286	290	294	298
2	.95	6.09	8.3	9.8	10.9	11.7	12.4	13.0	13.5	14.0	14.4	14.7	15.1	15.4	15.7	15.9	16.1	16.4	16.6	16.8
	.99	14.0	19.0	22.3	24.7	26.6	28.2	29.5	30.7	31.7	32.6	33.4	34.1	34.8	35.4	36.0	36.5	37.0	37.5	37.9
3	.95	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.2	10.4	10.5	10.7	10.8	11.0	11.1	11.2
	.99	8.26	10.6	12.2	13.3	14.2	15.0	15.6	16.2	16.7	17.1	17.5	17.9	18.2	18.5	18.8	19.1	19.3	19.5	19.8
4	.95	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
	.99	6.51	8.12	9.17	9.96	10.6	11.1	11.5	11.9	12.3	12.6	12.8	13.1	13.3	13.5	13.7	13.9	14.1	14.2	14.4
5	.95	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
	.99	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.2	10.5	10.7	10.9	11.1	11.2	11.4	11.6	11.7	11.8	11.9
6	.95	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
	.99	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.49	9.65	9.81	9.95	10.1	10.2	10.3	10.4	10.5
7	.95	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.09	7.17
	.99	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	.95	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
	.99	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	.95	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
	.99	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.32	8.41	8.49	8.57
10	.01	.02	.18	.42	.64	.81	.96	1.11	1.23	1.34	1.41	1.50	1.57	1.62	1.70	1.74	1.81	1.84	1.88	1.92
	.05	.09	.43	.75	1.01	1.20	1.37	1.52	1.63	1.74	1.83	1.91	1.98	2.05	2.12	2.17	2.22	2.26	2.30	2.34
	.95	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.20	6.27	6.34	6.40	6.47
	.99	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.48	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.07	8.15	8.22
11	.01	.02	.18	.42	.64	.82	.97	1.12	1.24	1.35	1.43	1.52	1.58	1.64	1.71	1.76	1.82	1.86	1.91	1.94
	.05	.09	.43	.75	1.01	1.21	1.38	1.52	1.64	1.75	1.84	1.92	2.00	2.07	2.13	2.18	2.24	2.28	2.33	2.37
	.95	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.99	6.06	6.14	6.20	6.26	6.33
	.99	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95

تابع الجدول ٥ : النسب المئوية لتوزيع $g = w/s$.

ν	cum. prop. \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
24	.01	.02	.18	.43	.65	.85	1.01	1.16	1.29	1.40	1.50	1.60	1.67	1.74	1.82	1.88	1.94	1.99	2.05	2.09
	.05	.09	.43	.75	1.02	1.23	1.41	1.56	1.69	1.80	1.90	1.99	2.08	2.15	2.22	2.28	2.34	2.39	2.45	2.49
	.95	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.50	5.54	5.59
	.99	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	.01	.02	.18	.43	.66	.85	1.02	1.17	1.30	1.41	1.52	1.61	1.69	1.76	1.84	1.90	1.97	2.02	2.07	2.12
	.05	.09	.43	.76	1.02	1.24	1.41	1.57	1.70	1.81	1.92	2.01	2.09	2.17	2.24	2.30	2.36	2.41	2.47	2.52
	.95	2.89	3.49	3.84	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.48
	.99	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	.01	.02	.18	.43	.66	.85	1.02	1.18	1.31	1.43	1.53	1.63	1.71	1.79	1.86	1.92	1.99	2.04	2.10	2.15
	.05	.09	.43	.76	1.02	1.24	1.42	1.57	1.71	1.82	1.93	2.02	2.10	2.18	2.26	2.32	2.38	2.43	2.49	2.54
	.95	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.74	4.82	4.91	4.98	5.05	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
	.99	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.27	5.39	5.50	5.60	5.69	5.77	5.84	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.17	6.21
60	.01	.02	.18	.43	.66	.86	1.03	1.19	1.32	1.44	1.55	1.64	1.73	1.81	1.88	1.95	2.02	2.07	2.13	2.18
	.05	.09	.43	.76	1.02	1.24	1.43	1.58	1.72	1.83	1.94	2.04	2.12	2.20	2.28	2.34	2.40	2.46	2.52	2.57
	.95	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.16	5.20	5.24
	.99	3.76	4.28	4.60	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.79	5.84	5.89	5.93	5.98	6.02
120	.01	.02	.18	.43	.66	.86	1.04	1.20	1.33	1.45	1.56	1.66	1.75	1.83	1.91	1.98	2.04	2.10	2.16	2.21
	.05	.09	.43	.76	1.03	1.25	1.43	1.59	1.73	1.85	1.96	2.06	2.14	2.22	2.30	2.36	2.43	2.49	2.54	2.60
	.95	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.48	4.56	4.64	4.72	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.05	5.09	5.13
	.99	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.38	5.44	5.51	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	.01	.02	.19	.43	.66	.87	1.05	1.20	1.34	1.47	1.58	1.68	1.77	1.86	1.93	2.01	2.08	2.14	2.20	2.25
	.05	.09	.43	.76	1.03	1.25	1.44	1.60	1.74	1.86	1.97	2.07	2.16	2.24	2.32	2.39	2.45	2.52	2.57	2.62
	.95	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01
	.99	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

الجدول ٦ : القيم الحرجة لـ r في اختبار الاشارة .

(نقاط النسب المئوية موزعة بالتساوي على الذيلين الأيمن والأيسر في حالة التوزيع الثنائي حيث $P = .5$)

N	1%	5%	10%	25%	N	1%	5%	10%	25%
1					46	13	15	16	18
2					47	14	16	17	19
3				0	48	14	16	17	19
4				0	49	15	17	18	19
5			0	0	50	15	17	18	20
6		0	0	1	51	15	18	19	20
7		0	0	1	52	16	18	19	21
8	0	0	1	1	53	16	18	20	21
9	0	1	1	2	54	17	19	20	22
10	0	1	1	2	55	17	19	20	22
11	0	1	2	3	56	17	20	21	23
12	1	2	2	3	57	18	20	21	23
13	1	2	3	3	58	18	21	22	24
14	1	2	3	4	59	19	21	22	24
15	2	3	3	4	60	19	21	23	25
16	2	3	4	5	61	20	22	23	25
17	2	4	4	5	62	20	22	24	25
18	3	4	5	6	63	20	23	24	26
19	3	4	5	6	64	21	23	24	26
20	3	5	5	6	65	21	24	25	27
21	4	5	6	7	66	22	24	25	27
22	4	5	6	7	67	22	25	26	28
23	4	6	7	8	68	22	25	26	28
24	5	6	7	8	69	23	25	27	29
25	5	7	7	9	70	23	26	27	29
26	6	7	8	9	71	24	26	28	30
27	6	7	8	10	72	24	27	28	30
28	6	8	9	10	73	25	27	28	31
29	7	8	9	10	74	25	28	29	31
30	7	9	10	11	75	25	28	29	32
31	7	9	10	11	76	26	28	30	32
32	8	9	10	12	77	26	29	30	32
33	8	10	11	12	78	27	29	31	33
34	9	10	11	13	79	27	30	31	33
35	9	11	12	13	80	28	30	32	34
36	9	11	12	14	81	28	31	32	34
37	10	12	13	14	82	28	31	33	35
38	10	12	13	14	83	29	32	33	35
39	11	12	13	15	84	29	32	33	36
40	11	13	14	15	85	30	32	34	36
41	11	13	14	16	86	30	33	34	37
42	12	14	15	16	87	31	33	35	37
43	12	14	15	17	88	31	34	35	38
44	13	15	16	17	89	31	34	36	38
45	13	15	16	18	90	32	35	36	39

من أجل قيم لـ N أكبر من 90 يمكن إيجاد قيم تقريبية لِـ r بأخذ أقرب عدد صحيح أقل من $\frac{1}{2}(N-1) - k\sqrt{N+1}$ ، حيث k هي 1.2879 ، 0.9800 ، 0.8224 ، 0.5752 من أجل 1 ، 5 ، 10 ، 25% ، على الترتيب .

الجدول ٧ : توزيع اختيار الإشارة . (النسب المئوية للتوزيع الثنائي $P = 0.5$)

تغطي النسب المئوية المذكورة هنا المدى بين $\alpha = .005$ و $\alpha = .125$ من أجل كل قيمة لـN حتى 100. ويمكن قراءة النسب المئوية من $\alpha = .875$ إلى $\alpha = .995$ بدخول الجدول بالعددين $N - x$ و $1 - \alpha$. x هو عدد الاشارات الموجبة.

N	x	α
3	0	.125
4	0	.062
4	1	.312
5	0	.031
5	1	.188
6	0	.016
6	1	.109
6	2	.344
7	0	.008
7	1	.062
7	2	.227
8	0	.004
8	1	.035
8	2	.145
9	0	.002
9	1	.020
9	2	.090
9	3	.254
10	0	.001
10	1	.011
10	2	.055
10	3	.172
11	0	.000
11	1	.006
11	2	.033
11	3	.113
11	4	.274
12	1	.003
12	2	.019
12	3	.073
12	4	.194
13	1	.002
13	2	.011
13	3	.046
13	4	.133
14	1	.001
14	2	.006
14	3	.029
14	4	.090
14	5	.212
15	1	.000
15	2	.004
15	3	.018
15	4	.059
15	5	.151
16	2	.002
16	3	.011
16	4	.038
16	5	.105
16	6	.227
17	2	.001
17	3	.006
17	4	.025
17	5	.072
17	6	.166
18	3	.004
18	4	.015
18	5	.048
18	6	.119
18	7	.240
19	3	.002
19	4	.010
19	5	.032
19	6	.084
19	7	.180
20	3	.001
20	4	.006
20	5	.021
20	6	.058
20	7	.132
21	4	.004
21	5	.013
21	6	.039
21	7	.095
21	8	.192
22	4	.002
22	5	.008
22	6	.026
22	7	.067
22	8	.143
23	4	.001
23	5	.005
23	6	.017
23	7	.047
23	8	.105
23	9	.202
24	5	.003
24	6	.011
24	7	.032
24	8	.076
24	9	.154
25	5	.002
25	6	.007
25	7	.022
25	8	.054
25	9	.115
25	10	.212
26	6	.005
26	7	.014
26	8	.038
26	9	.084
26	10	.163
27	6	.003
27	7	.010
27	8	.026
27	9	.061
27	10	.124
27	11	.221
28	6	.002
28	7	.006
28	8	.018
28	9	.044
28	10	.092
28	11	.172
29	7	.004
29	8	.012
29	9	.031
29	10	.068
29	11	.132
30	7	.003
30	8	.008
30	9	.021
30	10	.049
30	11	.100
30	12	.181
31	7	.002
31	8	.005
31	9	.015
31	10	.035
31	11	.075
31	12	.141
32	8	.004
32	9	.010
32	10	.025
32	11	.055
32	12	.108
32	13	.189
33	8	.002
33	9	.007
33	10	.018
33	11	.040
33	12	.081
33	13	.148
34	9	.005
34	10	.012
34	11	.029
34	12	.061
34	13	.115
34	14	.196
35	9	.003
35	10	.008
35	11	.020
35	12	.045
35	13	.088
35	14	.155
36	9	.002
36	10	.006
36	11	.014
36	12	.033
36	13	.066
36	14	.121
36	15	.203
37	10	.004
37	11	.010
37	12	.024
37	13	.049
37	14	.094
37	15	.162
38	10	.003
38	11	.007
38	12	.017
38	13	.036
38	14	.072
38	15	.128
39	11	.005
39	12	.012
39	13	.027
39	14	.054
39	15	.100
39	16	.168
40	11	.003
40	12	.008
40	13	.019
40	14	.040
40	15	.077
40	16	.134
41	11	.002
41	12	.006
41	13	.014
41	14	.030
41	15	.059
41	16	.106
41	17	.174
42	12	.004
42	13	.010
42	14	.022
42	15	.044
42	16	.082
42	17	.140

تابع الجدول ٧ : توزيع اختبار الاشارة .

N	x	α
43	12	.003
	13	.007
	14	.016
	15	.033
	16	.063
	17	.111
	18	.180
44	13	.005
	14	.011
	15	.024
	16	.048
	17	.087
	18	.146
45	13	.003
	14	.008
	15	.018
	16	.036
	17	.068
	18	.116
	19	.186
46	13	.002
	14	.006
	15	.013
	16	.027
	17	.052
	18	.092
	19	.151
47	14	.004
	15	.009
	16	.020
	17	.039
	18	.072
	19	.121
	20	.191
48	14	.003
	15	.007
	16	.015
	17	.030
	18	.056
	19	.097
	20	.156
49	15	.005
	16	.011
	17	.022
	18	.043
	19	.076
	20	.126
50	15	.003
	16	.008
	17	.016
	18	.032
	19	.059
	20	.101
	21	.161
51	15	.002
	16	.005
	17	.012
	18	.024
	19	.046
	20	.080
	21	.131
52	16	.004
	17	.009
	18	.018
	19	.035
	20	.063
	21	.106
	22	.166
53	16	.003
	17	.006
	18	.014
	19	.027
	20	.049
	21	.084
	22	.136
54	17	.005
	18	.010
	19	.020
	20	.038
	21	.067
	22	.110
	23	.170
55	17	.003
	18	.007
	19	.015
	20	.029
	21	.052
	22	.089
	23	.140
56	17	.002
	18	.005
	19	.011
	20	.022
	21	.041
	22	.070
	23	.114
	24	.175
57	18	.004
	19	.008
	20	.017
	21	.031
	22	.056
	23	.092
	24	.145
58	18	.003
	19	.006
	20	.012
	21	.024
	22	.043
	23	.074
	24	.119
	25	.179
59	19	.004
	20	.009
	21	.018
	22	.034
	23	.059
	24	.096
	25	.149
60	19	.003
	20	.007
	21	.014
	22	.026
	23	.046
	24	.078
	25	.123
	26	.183
61	20	.005
	21	.010
	22	.020
	23	.036
	24	.062
	25	.100
	26	.153
62	20	.004
	21	.008
	22	.015
	23	.028
	24	.049
	25	.081
	26	.126
63	20	.003
	21	.006
	22	.011
	23	.021
	24	.038
	25	.065
	26	.104
	27	.157
64	21	.004
	22	.008
	23	.016
	24	.030
	25	.052
	26	.084
	27	.130
65	21	.003
	22	.006
	23	.012
	24	.023
	25	.041
	26	.068
	27	.107
	28	.161
66	22	.005
	23	.009
	24	.018
	25	.032
	26	.054
	27	.088
	28	.134
67	22	.003
	23	.007
	24	.014
	25	.025
	26	.043
	27	.071
	28	.111
	29	.164
68	22	.002
	23	.005
	24	.010
	25	.019
	26	.034
	27	.057
	28	.091
	29	.137
69	23	.004
	24	.008
	25	.015
	26	.027
	27	.046
	28	.074
	29	.114
	30	.168
70	23	.003
	24	.006
	25	.011
	26	.021
	27	.036
	28	.060
	29	.094
	30	.141
71	24	.004
	25	.008
	26	.016
	27	.028
	28	.048
	29	.077
	30	.118
	31	.171
72	24	.003
	25	.006
	26	.012
	27	.022
	28	.038
	29	.062
	30	.097
	31	.144
73	25	.005
	26	.009
	27	.017
	28	.030
	29	.050
	30	.080
	31	.121
	32	.175
74	25	.004
	26	.007
	27	.013
	28	.024
	29	.040
	30	.065
	31	.100
	32	.148

تابع الجدول ٧ : توزيع اختبار الاشارة .

x	α
$N = 75$	
25	.003
26	.005
27	.010
28	.018
29	.032
30	.053
31	.083
32	.124
33	.179
$N = 76$	
26	.004
27	.008
28	.014
29	.025
30	.042
31	.068
32	.103
33	.151
$N = 77$	
26	.003
27	.006
28	.011
29	.020
30	.034
31	.055
32	.086
33	.127
$N = 78$	
27	.004
28	.008
29	.015
30	.027
31	.044
32	.070
33	.106
34	.154
$N = 79$	
27	.003
28	.006
29	.012
30	.021
31	.036
32	.057
33	.088
34	.130

x	α
$N = 80$	
28	.005
29	.009
30	.016
31	.028
32	.046
33	.073
34	.109
35	.157
$N = 81$	
28	.004
29	.007
30	.013
31	.022
32	.037
33	.060
34	.091
35	.133
$N = 82$	
28	.003
29	.005
30	.010
31	.018
32	.030
33	.049
34	.075
35	.112
36	.160
$N = 83$	
29	.004
30	.008
31	.014
32	.024
33	.039
34	.062
35	.094
36	.136
$N = 84$	
29	.003
30	.006
31	.011
32	.019
33	.031
34	.051
35	.078
36	.115
37	.163

x	α
$N = 85$	
30	.004
31	.008
32	.015
33	.025
34	.041
35	.064
36	.096
37	.139
$N = 86$	
30	.003
31	.006
32	.011
33	.020
34	.033
35	.053
36	.080
37	.118
38	.166
$N = 87$	
31	.005
32	.009
33	.016
34	.027
35	.043
36	.066
37	.099
38	.142
$N = 88$	
31	.004
32	.007
33	.012
34	.012
35	.035
36	.055
37	.083
38	.120
39	.169

x	α
$N = 89$	
31	.003
32	.005
33	.010
34	.017
35	.028
36	.045
37	.069
38	.102
39	.145
$N = 90$	
32	.004
33	.007
34	.013
35	.022
36	.036
37	.057
38	.085
39	.123
40	.171
$N = 91$	
32	.003
33	.006
34	.010
35	.018
36	.029
37	.046
38	.071
39	.104
40	.147
$N = 92$	
33	.004
34	.008
35	.014
36	.024
37	.038
38	.059
39	.087
40	.126

x	α
$N = 93$	
33	.003
34	.006
35	.011
36	.019
37	.031
38	.048
39	.073
40	.107
41	.150
$N = 94$	
34	.005
35	.009
36	.015
37	.025
38	.039
39	.061
40	.090
41	.128
$N = 95$	
34	.004
35	.007
36	.012
37	.020
38	.032
39	.050
40	.075
41	.109
42	.152
$N = 96$	
34	.003
35	.005
36	.009
37	.016
38	.026
39	.041
40	.063
41	.092
42	.131

x	α
$N = 97$	
35	.004
36	.007
37	.012
38	.021
39	.034
40	.052
41	.077
42	.111
43	.155
$N = 98$	
35	.003
36	.006
37	.010
38	.017
39	.027
40	.043
41	.065
42	.094
43	.133
$N = 99$	
36	.004
37	.008
38	.013
39	.022
40	.035
41	.054
42	.080
43	.114
44	.157
$N = 100$	
36	.003
37	.006
38	.010
39	.018
40	.028
41	.044
42	.067
43	.097
44	.136

الجدول ٨ : توزيع احصاء الرتبة المؤشرة T .

تغطي النسب المئوية هنا المدى بين $\alpha = .005$ و $\alpha = .125$ من أجل كل حجم عينة حتى $N = 20$.

وقيم T_α هي بحيث أن $\alpha = P(T \leqslant T_\alpha)$ والقيم $T_{1-\alpha}$ هي بحيث يكون $\alpha = P(T \geqslant T_{1-\alpha})$.

T_α	$T_{1-\alpha}$	α
	$N = 1$	
0	1	.500
	$N = 2$	
0	3	.250
	$N = 3$	
0	6	.125
	$N = 4$	
0	10	.062
1	9	.125
	$N = 5$	
0	15	.031
1	14	.062
2	13	.094
3	12	.156
	$N = 6$	
0	21	.016
1	20	.031
2	19	.047
3	18	.078
4	17	.109
5	16	.156
	$N = 7$	
0	28	.008
1	27	.016
2	26	.023
3	25	.039
4	24	.055
5	23	.078
6	22	.109
7	21	.148
	$N = 8$	
0	36	.004
1	35	.008
2	34	.012
3	33	.020
4	32	.027
5	31	.039
6	30	.055
7	29	.074
8	28	.098
9	27	.125
	$N = 9$	
1	44	.004
2	43	.006
3	42	.010

T_α	$T_{1-\alpha}$	α
	$N = 9$ (*Cont.*)	
4	41	.014
5	40	.020
6	39	.027
7	38	.037
8	37	.049
9	36	.064
10	35	.082
11	34	.102
12	33	.125
	$N = 10$	
3	52	.005
4	51	.007
5	50	.010
6	49	.014
7	48	.019
8	47	.024
9	46	.032
10	45	.042
11	44	.053
12	43	.065
13	42	.080
14	41	.097
15	40	.116
16	39	.138
	$N = 11$	
5	61	.005
6	60	.007
7	59	.009
8	58	.012
9	57	.016
10	56	.021
11	55	.027
12	54	.034
13	53	.042
14	52	.051
15	51	.062
16	50	.074
17	49	.087
18	48	.103
19	47	.120
20	46	.139
	$N = 12$	
7	71	.005
8	70	.006

T_α	$T_{1-\alpha}$	α
	$N = 12$ (*Cont.*)	
9	69	.008
10	68	.010
11	67	.013
12	66	.017
13	65	.021
14	64	.026
15	63	.032
16	62	.039
17	61	.046
18	60	.055
19	59	.065
20	58	.076
21	57	.088
22	56	.102
23	55	.117
24	54	.133
	$N = 13$	
9	82	.004
10	81	.005
11	80	.007
12	79	.009
13	78	.011
14	77	.013
15	76	.016
16	75	.020
17	74	.024
18	73	.029
19	72	.034
20	71	.040
21	70	.047
22	69	.055
23	68	.064
24	67	.073
25	66	.084
26	65	.095
27	64	.108
28	63	.122
29	62	.137
	$N = 14$	
12	93	.004
13	92	.005
14	91	.007
15	90	.008
16	89	.010

T_α	$T_{1-\alpha}$	α
	$N = 14$ (*Cont.*)	
17	88	.012
18	87	.015
19	86	.018
20	85	.021
21	84	.025
22	83	.029
23	82	.034
24	81	.039
25	80	.045
26	79	.052
27	78	.059
28	77	.068
29	76	.077
30	75	.086
31	74	.097
32	73	.108
33	72	.121
34	71	.134
	$N = 15$	
15	105	.004
16	104	.005
17	103	.006
18	102	.008
19	101	.009
20	100	.011
21	99	.013
22	98	.015
23	97	.018
24	96	.021
25	95	.024
26	94	.028
27	93	.032
28	92	.036
29	91	.042
30	90	.047
31	89	.053
32	88	.060
33	87	.068
34	86	.076
35	85	.084
36	84	.094
37	83	.104
38	82	.115
39	81	.126

تابع الجدول ٨ : توزيع احصاء الرتبة المؤشرة T .

T_α	$T_{1-\alpha}$	α	T_α	$T_{1-\alpha}$	α	T_α	$T_{1-\alpha}$	α	T_α	$T_{1-\alpha}$	α
	$N = 16$			$N = 17$ (*Cont.*)			$N = 18$ (*Cont.*)			$N = 19$ (*Cont.*)	
19	117	.005	36	117	.028	51	120	.071	64	126	.112
20	116	.005	37	116	.032	52	119	.077	65	125	.121
21	115	.007	38	115	.036	53	118	.084	66	124	.129
22	114	.008	39	114	.040	54	117	.091		$N = 20$	
23	113	.009	40	113	.044	55	116	.098	37	173	.005
24	112	.011	41	112	.049	56	115	.106	38	172	.005
25	111	.012	42	111	.054	57	114	.114	39	171	.006
26	110	.014	43	110	.060	58	113	.123	40	170	.007
27	109	.017	44	109	.066	59	112	.132	41	169	.008
28	108	.019	45	108	.072		$N = 19$		42	168	.009
29	107	.022	46	107	.080	32	158	.005	43	167	.010
30	106	.025	47	106	.087	33	157	.005	44	166	.011
31	105	.029	48	105	.095	34	156	.006	45	165	.012
32	104	.033	49	104	.103	35	155	.007	46	164	.013
33	103	.037	50	103	.112	36	154	.008	47	163	.015
34	102	.042	51	102	.122	37	153	.009	48	162	.016
35	101	.047	52	101	.132	38	152	.010	49	161	.018
36	100	.052		$N = 18$		39	151	.011	50	160	.020
37	99	.058	27	144	.004	40	150	.013	51	159	.022
38	98	.065	28	143	.005	41	149	.014	52	158	.024
39	97	.072	29	142	.006	42	148	.016	53	157	.027
40	96	.080	30	141	.007	43	147	.018	54	156	.029
41	95	.088	31	140	.008	44	146	.020	55	155	.032
42	94	.096	32	139	.009	45	145	.022	56	154	.035
43	93	.106	33	138	.010	46	144	.025	57	153	.038
44	92	.116	34	137	.012	47	143	.027	58	152	.041
45	91	.125	35	136	.013	48	142	.030	59	151	.045
46	90	.137	36	135	.015	49	141	.033	60	150	.049
	$N = 17$		37	134	.017	50	140	.036	61	149	.053
23	130	.005	38	133	.019	51	139	.040	62	148	.057
24	129	.005	39	132	.022	52	138	.044	63	147	.061
25	128	.006	40	131	.024	53	137	.048	64	146	.066
26	127	.008	41	130	.027	54	136	.052	65	145	.071
27	126	.009	42	129	.030	55	135	.057	66	144	.077
28	125	.010	43	128	.033	56	134	.062	67	143	.082
29	124	.012	44	127	.037	57	133	.067	68	142	.088
30	123	.013	45	126	.040	58	132	.072	69	141	.095
31	122	.015	46	125	.045	59	131	.078	70	140	.101
32	121	.017	47	124	.049	60	130	.084	71	139	.108
33	120	.020	48	123	.054	61	129	.091	72	138	.115
34	119	.022	49	122	.059	62	128	.098	73	137	.123
35	118	.025	50	121	.065	63	127	.105	74	136	.131

الجدول ٩ : توزيع العدد الكلي للأشواطِ u في عينتين حجماهما (N_1, N_2) . (N_1, N_2)

$(N_1, N_2) \backslash u$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2,3)	.200	.500	.900	1.000															
(2,4)	.133	.400	.800	1.000															
(2,5)	.095	.333	.714	1.000															
(2,6)	.071	.286	.643	1.000															
(2,7)	.056	.250	.583	1.000															
(2,8)	.044	.222	.533	1.000															
(2,9)	.036	.200	.491	1.000															
(2,10)	.030	.182	.455	1.000															
(3,3)	.100	.300	.700	.900	1.000														
(3,4)	.057	.200	.543	.800	.971	1.000													
(3,5)	.036	.143	.429	.714	.929	1.000													
(3,6)	.024	.107	.345	.643	.881	1.000													
(3,7)	.017	.083	.283	.583	.833	1.000													
(3,8)	.012	.067	.236	.533	.788	1.000													
(3,9)	.009	.055	.200	.491	.745	1.000													
(3,10)	.007	.045	.171	.455	.706	1.000													
(4,4)	.029	.114	.371	.629	.886	.971	1.000												
(4,5)	.016	.071	.262	.500	.786	.929	.992	1.000											
(4,6)	.010	.048	.190	.405	.690	.881	.976	1.000											
(4,7)	.006	.033	.142	.333	.606	.833	.954	1.000											
(4,8)	.004	.024	.109	.279	.533	.788	.929	1.000											
(4,9)	.003	.018	.085	.236	.471	.745	.902	1.000											
(4,10)	.002	.014	.068	.203	.419	.706	.874	1.000											
(5,5)	.008	.040	.167	.357	.643	.833	.960	.992	1.000										
(5,6)	.004	.024	.110	.262	.522	.738	.911	.976	.998	1.000									
(5,7)	.003	.015	.076	.197	.424	.652	.854	.955	.992	1.000									
(5,8)	.002	.010	.054	.152	.347	.576	.793	.929	.984	1.000									
(5,9)	.001	.007	.039	.119	.287	.510	.734	.902	.972	1.000									
(5,10)	.001	.005	.029	.095	.239	.455	.678	.874	.958	1.000									
(6,6)	.002	.013	.067	.175	.392	.608	.825	.933	.987	.998	1.000								
(6,7)	.001	.008	.043	.121	.296	.500	.733	.879	.966	.992	.999	1.000							
(6,8)	.001	.005	.028	.086	.226	.413	.646	.821	.937	.984	.998	1.000							
(6,9)	.000	.003	.019	.063	.175	.343	.566	.762	.902	.972	.994	1.000							
(6,10)	.000	.002	.013	.047	.137	.288	.497	.706	.864	.958	.990	1.000							
(7,7)	.001	.004	.025	.078	.209	.383	.617	.791	.922	.975	.996	.999	1.000						
(7,8)	.000	.002	.015	.051	.149	.296	.514	.704	.867	.949	.988	.998	1.000	1.000					
(7,9)	.000	.001	.010	.035	.108	.231	.427	.622	.806	.916	.975	.994	.999	1.000					
(7,10)	.000	.001	.006	.024	.080	.182	.355	.549	.743	.879	.957	.990	.998	1.000					
(8,8)	.000	.001	.009	.032	.100	.214	.405	.595	.786	.900	.968	.991	.999	1.000	1.000				
(8,9)	.000	.001	.005	.020	.069	.157	.319	.500	.702	.843	.939	.980	.996	.999	1.000	1.000			
(8,10)	.000	.000	.003	.013	.048	.117	.251	.419	.621	.782	.903	.964	.990	.998	1.000	1.000			
(9,9)	.000	000	.003	.012	.044	.109	.238	.399	.601	.762	.891	.956	.988	.997	1.000	1.000	1.000		
(9,10)	.000	.000	.002	.008	.029	.077	.179	.319	.510	.681	.834	.923	.974	.992	.999	1.000	1.000	1.000	
(10,10)	.000	.000	.001	.004	.019	.051	.128	.242	.414	.586	.758	.872	.949	.981	.996	.999	1.000	1.000	1.000

تعطي القيم المذكورة على الصفحة السابقة احتمال وقع u من الأشواط على الأكثر . وعلى سبيل المثال ، من أجل عينتين حجماهما 4 = $N_1 = N_2$ نجد احتمال وقوع 3 أشواط على الأكثر 0.114 ومن أجل عينات $N_1 = N_2$ أكبر من 10 يمكن استخدام الجدول التالي . الأعمدة تحت 0.5 ، 1 ، 2.5 ، 5 تعطي قيم u بحيث يكون احتمال وقوع u من الأشواط على الأكثر أقل من النسبة المئوية في رأس العمود . مثلاً ، من أجل 12 = $N_1 = N_2$ نجد احتمال 8 أشواط على الأكثر حوالي 0.05 . وتقدم الأعمدة تحت 95 ، 97.5 ، 99 ، 99.5 قيم u بحيث يكون إحتمال وقوع u شوطاً على الأقل أقل من 5% ، 2.5% ، 1% ، 0.5% ، على الترتيب .

$N_1 = N_2$	0.5	1	2.5	5	95	97.5	99	99.5	Mean	Var.	s.d.
11	5	6	7	7	16	16	17	18	12	5.24	2.29
12	6	7	7	8	17	18	18	19	13	5.74	2.40
13	7	7	8	9	18	19	20	20	14	6.24	2.50
14	7	8	9	10	19	20	21	22	15	6.74	2.60
15	8	9	10	11	20	21	22	23	16	7.24	2.69
16	9	10	11	11	22	22	23	24	17	7.74	2.78
17	10	10	11	12	23	24	25	25	18	8.24	2.87
18	10	11	12	13	24	25	26	27	19	8.74	2.96
19	11	12	13	14	25	26	27	28	20	9.24	3.04
20	12	13	14	15	26	27	28	29	21	9.74	3.12
25	16	17	18	19	32	33	34	35	26	12.24	3.50
30	20	21	22	24	37	39	40	41	31	14.75	3.84
35	24	25	27	28	43	44	46	47	36	17.25	4.15
40	29	30	31	33	48	50	51	52	41	19.75	4.44
45	33	34	36	37	54	55	57	58	46	22.25	4.72
50	37	38	40	42	59	61	63	64	51	24.75	4.97
55	42	43	45	46	65	66	68	69	56	27.25	5.22
60	46	47	49	51	70	72	74	75	61	29.75	5.45
65	50	52	54	56	75	77	79	81	66	32.25	5.68
70	55	56	58	60	81	83	85	86	71	34.75	5.89
75	59	61	63	65	86	88	90	92	76	37.25	6.10
80	64	65	68	70	91	93	96	97	81	39.75	6.30
85	68	70	72	74	97	99	101	103	86	42.25	6.50
90	73	74	77	79	102	104	107	108	91	44.75	6.69
95	77	79	82	84	107	109	112	114	96	47.25	6.87
100	82	84	86	88	113	115	117	119	101	49.75	7.05

من أجل قيم كبيرة لـ N_1 و N_2 ، بصورة خاصة من أجل $N_1 = N_2$ أكبر من 10 ، يمكن استخدام التقريب الطبيعي . المتوسط والتشتت هما :

$$\text{المتوسط} = \frac{2N_1 N_2}{N_1 + N_2} + 1 \quad , \quad \text{التشتت} = \frac{2N_1 N_2 (2N_1 N_2 - N_1 - N_2)}{(N_1 + N_2)^2 (N_1 + N_2 - 1)}$$

وعلى سبيل المثال من أجل 20 = $N_1 = N_2$ يكون المتوسط 21 والتشتت 9.74 والقيم الموافقة للنسبتين المئويين 97.5 و 2.5 هما $21 \pm 1.96\sqrt{9.74}$ أو 27.1 و 14.9 ويمكن تحسين التقريب بطرح $\frac{1}{2}$ من القيم المحسوبة . والنسب المئوية الناتجة ستكون عندئذ 26.6 و 14.4 . من أجل عينتين حجم كل منهما N يصبح المتوسط $N + 1$ والتشتت $N(N-1)/(2N-1)$.

الجدول ١٠ ـ توزيع مجموع الرتب T' .

N_1 و N_2 حجما عينتين عشوائيتين . إذا كانت العينتان من نفس المجتمع فتتحدد قيم T'_α ، $T'_{1-\alpha}$ و α من العلاقتين $\Pr(T' \leqslant T'_\alpha) = \alpha$ ، و $\Pr(T' \geqslant T'_{1-\alpha}) = \alpha$. T' مجموع الرتب الموافقة للملاحظات الـ N_1 في العينة الأصغر . N_1 و N_2 موضوعان ضمن قوسين .

T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α
	(1,1)	
1	2	.500
	(1,2)	
1	3	.333
2	2	.667
	(1,3)	
1	4	.250
2	3	.500
	(1,4)	
1	5	.200
2	4	.400
3	3	.600
	(1,5)	
1	6	.167
2	5	.333
3	4	.500
	(1,6)	
1	7	.143
2	6	.286
3	5	.428
4	4	.571
	(1,7)	
1	8	.125
2	7	.250
3	6	.375
4	5	.500
	(1,8)	
1	9	.111
2	8	.222
3	7	.333
4	6	.444
5	5	.556
	(1,9)	
1	10	.100
2	9	.200
3	8	.300
4	7	.400
5	6	.500
	(1,10)	
1	11	.091
2	10	.182
3	9	.273
4	8	.364
5	7	.455
6	6	.545

T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α
	(2,2)	
3	7	.167
4	6	.333
5	5	.667
	(2,3)	
3	9	.100
4	8	.200
5	7	.400
6	6	.600
	(2,4)	
3	11	.067
4	10	.133
5	9	.267
6	8	.400
7	7	.600
	(2,5)	
3	13	.047
4	12	.095
5	11	.190
6	10	.286
7	9	.429
8	8	.571
	(2,6)	
3	15	.036
4	14	.071
5	13	.143
6	12	.214
7	11	.321
8	10	.429
9	9	.571
	(2,7)	
3	17	.028
4	16	.056
5	15	.111
6	14	.167
7	13	.250
8	12	.333
9	11	.444
10	10	.556
	(2,8)	
3	19	.022
4	18	.044
5	17	.089
6	16	.133
7	15	.200

T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α
	(2,8) (*Cont.*)	
8	14	.267
9	13	.356
10	12	.444
11	11	.556
	(2,9)	
3	21	.018
4	20	.036
5	19	.073
6	18	.109
7	17	.164
8	16	.218
9	15	.291
10	14	.364
11	13	.455
12	12	.545
	(2,10)	
3	23	.015
4	22	.030
5	21	.061
6	20	.091
7	19	.136
8	18	.182
9	17	.242
10	16	.303
11	15	.379
12	14	.455
13	13	.545
	(3,3)	
6	15	.050
7	14	.100
8	13	.200
9	12	.350
10	11	.500
	(3,4)	
6	18	.028
7	17	.057
8	16	.114
9	15	.200
10	14	.314
11	13	.429
12	12	.571
	(3,5)	
6	21	.018
7	20	.036

T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α
	(3,5) (*Cont.*)	
8	19	.071
9	18	.125
10	17	.196
11	16	.286
12	15	.393
13	14	.500
	(3,6)	
6	24	.012
7	23	.024
8	22	.048
9	21	.083
10	20	.131
11	19	.190
12	18	.274
13	17	.357
14	16	.452
15	15	.548
	(3,7)	
6	27	.008
7	26	.017
8	25	.033
9	24	.058
10	23	.092
11	22	.133
12	21	.192
13	20	.258
14	19	.333
15	18	.417
16	17	.500
	(3,8)	
6	30	.006
7	29	.012
8	28	.024
9	27	.042
10	26	.067
11	25	.097
12	24	.139
13	23	.188
14	22	.248
15	21	.315
16	20	.387
17	19	.461
18	18	.539

تابع الجدول ١٠ ـ توزيع مجموع الرتب

T'_{α}	$T'_{1-\alpha}$	α
	(3,9)	
6	33	.005
7	32	.009
8	31	.018
9	30	.032
10	29	.050
11	28	.073
12	27	.105
13	26	.141
14	25	.186
15	24	.241
16	23	.300
17	22	.363
18	21	.432
19	20	.500
	(3,10)	
6	36	.003
7	35	.007
8	34	.014
9	33	.024
10	32	.038
11	31	.056
12	30	.080
13	29	.108
14	28	.143
15	27	.185
16	26	.234
17	25	.287
18	24	.346
19	23	.406
20	22	.469
21	21	.531
	(4,4)	
10	26	.014
11	25	.029
12	24	.057
13	23	.100
14	22	.171
15	21	.243
16	20	.343
17	19	.443
18	18	.557
	(4,5)	
10	30	.008
11	29	.016
12	28	.032
13	27	.056
14	26	.095
15	25	.143
16	24	.206

T'_{α}	$T'_{1-\alpha}$	α
	(4,5) (*Cont.*)	
17	23	.278
18	22	.365
19	21	.452
20	20	.548
	(4,6)	
10	34	.005
11	33	.010
12	32	.019
13	31	.033
14	30	.057
15	29	.086
16	28	.129
17	27	.176
18	26	.238
19	25	.305
20	24	.381
21	23	.457
22	22	.545
	(4,7)	
10	38	.003
11	37	.006
12	36	.012
13	35	.021
14	34	.036
15	33	.055
16	32	.082
17	31	.115
18	30	.158
19	29	.206
20	28	.264
21	27	.324
22	26	.394
23	25	.464
24	24	.538
	(4,8)	
10	42	.002
11	41	.004
12	40	.008
13	39	.014
14	38	.024
15	37	.036
16	36	.055
17	35	.077
18	34	.107
19	33	.141
20	32	.184
21	31	.230
22	30	.285
23	29	.341

T'_{α}	$T'_{1-\alpha}$	α
	(4,8) (*Cont.*)	
24	28	.404
25	27	.467
26	26	.533
	(4,9)	
10	46	.001
11	45	.003
12	44	.006
13	43	.010
14	42	.017
15	41	.025
16	40	.038
17	39	.053
18	38	.074
19	37	.099
20	36	.130
21	35	.165
22	34	.207
23	33	.252
24	32	.302
25	31	.355
26	30	.413
27	29	.470
28	28	.530
	(4,10)	
10	50	.001
11	49	.002
12	48	.004
13	47	.007
14	46	.012
15	45	.018
16	44	.026
17	43	.038
18	42	.053
19	41	.071
20	40	.094
21	39	.120
22	38	.152
23	37	.187
24	36	.227
25	35	.270
26	34	.318
27	33	.367
28	32	.420
29	31	.473
30	30	.527
	(5,5)	
15	40	.004
16	39	.008
17	38	.016

T'_{α}	$T'_{1-\alpha}$	α
	(5,5) (*Cont.*)	
18	37	.028
19	36	.048
20	35	.075
21	34	.111
22	33	.155
23	32	.210
24	31	.274
25	30	.345
26	29	.421
27	28	.500
	(5,6)	
15	45	.002
16	44	.004
17	43	.009
18	42	.015
19	41	.026
20	40	.041
21	39	.063
22	38	.089
23	37	.123
24	36	.165
25	35	.214
26	34	.268
27	33	.331
28	32	.396
29	31	.465
30	30	.535
	(5,7)	
15	50	.001
16	49	.003
17	48	.005
18	47	.009
19	46	.015
20	45	.024
21	44	.037
22	43	.053
23	42	.074
24	41	.101
25	40	.134
26	39	.172
27	38	.216
28	37	.265
29	36	.319
30	35	.378
31	34	.438
32	33	.500
	(5,8)	
15	55	.001
16	54	.002

T'_{α}	$T'_{1-\alpha}$	α
(5,8) (*Cont.*)		
17	53	.003
18	52	.005
19	51	.009
20	50	.015
21	49	.023
22	48	.033
23	47	.047
24	46	.064
25	45	.085
26	44	.111
27	43	.142
28	42	.177
29	41	.217
30	40	.262
31	39	.311
32	38	.362
33	37	.416
34	36	.472
35	35	.528
(5,9)		
15	60	.000
16	59	.001
17	58	.002
18	57	.003
19	56	.006
20	55	.009
21	54	.014
22	53	.021
23	52	.030
24	51	.041
25	50	.056
26	49	.073
27	48	.095
28	47	.120
29	46	.149
30	45	.182
31	44	.219
32	43	.259
33	42	.303
34	41	.350
35	40	.399
36	39	.449
37	38	.500
(5,10)		
15	65	.000
16	64	.001
17	63	.001
18	62	.002
19	61	.004

T'_{α}	$T'_{1-\alpha}$	α
(5,10) (*Cont.*)		
20	60	.006
21	59	.010
22	58	.014
23	57	.020
24	56	.028
25	55	.038
26	54	.050
27	53	.065
28	52	.082
29	51	.103
30	50	.127
31	49	.155
32	48	.185
33	47	.220
34	46	.257
35	45	.297
36	44	.339
37	43	.384
38	42	.430
39	41	.477
40	40	.523
(6,6)		
21	57	.001
22	56	.002
23	55	.004
24	54	.008
25	53	.013
26	52	.021
27	51	.032
28	50	.047
29	49	.066
30	48	.090
31	47	.120
32	46	.155
33	45	.197
34	44	.242
35	43	.294
36	42	.350
37	41	.409
38	40	.469
39	39	.531
(6,7)		
21	63	.001
22	62	.001
23	61	.002
24	60	.004
25	59	.007
26	58	.011
27	57	.017

T'_{α}	$T'_{1-\alpha}$	α
(6,7) (*Cont.*)		
28	56	.026
29	55	.037
30	54	.051
31	53	.069
32	52	.090
33	51	.117
34	50	.147
35	49	.183
36	48	.223
37	47	.267
38	46	.314
39	45	.365
40	44	.418
41	43	.473
42	42	.527
(6,8)		
21	69	.000
22	68	.001
23	67	.001
24	66	.002
25	65	.004
26	64	.006
27	63	.010
28	62	.015
29	61	.021
30	60	.030
31	59	.041
32	58	.054
33	57	.071
34	56	.091
35	55	.114
36	54	.141
37	53	.172
38	52	.207
39	51	.245
40	50	.286
41	49	.331
42	48	.377
43	47	.426
44	46	.475
45	45	.525
(6,9)		
21	75	.000
22	74	.000
23	73	.001
24	72	.001
25	71	.002
26	70	.004
27	69	.006

T'_{α}	$T'_{1-\alpha}$	α
(6,9) (*Cont.*)		
28	68	.009
29	67	.013
30	66	.018
31	65	.025
32	64	.033
33	63	.044
34	62	.057
35	61	.072
36	60	.091
37	59	.112
38	58	.136
39	57	.164
40	56	.194
41	55	.228
42	54	.264
43	53	.303
44	52	.344
45	51	.388
46	50	.432
47	49	.477
48	48	.523
(6,10)		
21	81	.000
22	80	.000
23	79	.000
24	78	.001
25	77	.001
26	76	.002
27	75	.004
28	74	.005
29	73	.008
30	72	.011
31	71	.016
32	70	.021
33	69	.028
34	68	.036
35	67	.047
36	66	.059
37	65	.074
38	64	.090
39	63	.110
40	62	.132
41	61	.157
42	60	.184
43	59	.214
44	58	.246
45	57	.281
46	56	.318
47	55	.356

تابع الجدول ١٠ ـ توزيع مجموع الرتب T' .

T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α	T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α	T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α	T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α
	(6,10) (*Cont.*)			(7,8) (*Cont.*)			(7,10) (*Cont.*)			(8,8) (*Cont.*)	
48	54	.396	46	66	.140	32	94	.001	52	84	.052
49	53	.437	47	65	.168	33	93	.001	53	83	.065
50	52	.479	48	64	.198	34	92	.001	54	82	.080
51	51	.521	49	63	.232	35	91	.002	55	81	.097
	(7,7)		50	62	.268	36	90	.003	56	80	.117
28	77	.000	51	61	.306	37	89	.005	57	79	.139
29	76	.001	52	60	.347	38	88	.007	58	78	.164
30	75	.001	53	59	.389	39	87	.009	59	77	.191
31	74	.002	54	58	.433	40	86	.012	60	76	.221
32	73	.003	55	57	.478	41	85	.017	61	75	.253
33	72	.006	56	56	.522	42	84	.022	62	74	.287
34	71	.009		(7,9)		43	83	.028	63	73	.323
35	70	.013	28	91	.000	44	82	.035	64	72	.360
36	69	.019	29	90	.000	45	81	.044	65	71	.399
37	68	.027	30	89	.000	46	80	.054	66	70	.439
38	67	.036	31	88	.001	47	79	.067	67	69	.480
39	66	.049	32	87	.001	48	78	.081	68	68	.520
40	65	.064	33	86	.002	49	77	.097		(8,9)	
41	64	.082	34	85	.003	50	76	.115	36	108	.000
42	63	.104	35	84	.004	51	75	.135	40	104	.000
43	62	.130	36	83	.006	52	74	.157	41	103	.001
44	61	.159	37	82	.008	53	73	.182	42	102	.001
45	60	.191	38	81	.011	54	72	.209	43	101	.002
46	59	.228	39	80	.016	55	71	.237	44	100	.003
47	58	.267	40	79	.021	56	70	.268	45	99	.004
48	57	.310	41	78	.027	57	69	.300	46	98	.006
49	56	.355	42	77	.036	58	68	.335	47	97	.008
50	55	.402	43	76	.045	59	67	.370	48	96	.010
51	54	.451	44	75	.057	60	66	.406	49	95	.014
52	53	.500	45	74	.071	61	65	.443	50	94	.018
	(7,8)		46	73	.087	62	64	.481	51	93	.023
28	84	.000	47	72	.105	63	63	.519	52	92	.030
29	83	.000	48	71	.126		(8,8)		53	91	.037
30	82	.001	49	70	.150	36	100	.000	54	90	.046
31	81	.001	50	69	.175	37	99	.000	55	89	.057
32	80	.002	51	68	.204	38	98	.000	56	88	.069
33	79	.003	52	67	.235	39	97	.001	57	87	.084
34	78	.005	53	66	.268	40	96	.001	58	86	.100
35	77	.007	54	65	.303	41	95	.001	59	85	.118
36	76	.010	55	64	.340	42	94	.002	60	84	.138
37	75	.014	56	63	.379	43	93	.003	61	83	.161
38	74	.020	57	62	.419	44	92	.005	62	82	.185
39	73	.027	58	61	.459	45	91	.007	63	81	.212
40	72	.036	59	60	.500	46	90	.010	64	80	.240
41	71	.047		(7,10)		47	89	.014	65	79	.271
42	70	.060	28	98	.000	48	88	.019	66	78	.303
43	69	.076	29	97	.000	49	87	.025	67	77	.336
44	68	.095	30	96	.000	50	86	.032	68	76	.371
45	67	.116	31	95	.000	51	85	.041	69	75	.407

تابع الجدول ١٠-توزيع مجموع الرتب

T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α	T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α	T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α	T'_α	$T'_{1-\alpha}$	α
(8,9) (*Cont.*)			(9,9)			(9,10) (*Cont.*)			(10,10) (*Cont.*)		
70	74	.444	45	126	.000	54	126	.001	65	145	.001
71	73	.481	50	121	.000	55	125	.001	66	144	.001
72	72	.519	51	120	.001	56	124	.002	67	143	.001
(8,10)			52	119	.001	57	123	.003	68	142	.002
36	116	.000	53	118	.001	58	122	.004	69	141	.003
41	111	.000	54	117	.002	59	121	.005	70	140	.003
42	110	.001	55	116	.003	60	120	.007	71	139	.004
43	109	.001	56	115	.004	61	119	.009	72	138	.006
44	108	.002	57	114	.005	62	118	.011	73	137	.007
45	107	.002	58	113	.007	63	117	.014	74	136	.009
46	106	.003	59	112	.009	64	116	.017	75	135	.012
47	105	.004	60	111	.012	65	115	.022	76	134	.014
48	104	.006	61	110	.016	66	114	.027	77	133	.018
49	103	.008	62	109	.020	67	113	.033	78	132	.022
50	102	.010	63	108	.025	68	112	.039	79	131	.026
51	101	.013	64	107	.031	69	111	.047	80	130	.032
52	100	.017	65	106	.039	70	110	.056	81	129	.038
53	99	.022	66	105	.047	71	109	.067	82	128	.045
54	98	.027	67	104	.057	72	108	.078	83	127	.053
55	97	.034	68	103	.068	73	107	.091	84	126	.062
56	96	.042	69	102	.081	74	106	.106	85	125	.072
57	95	.051	70	101	.095	75	105	.121	86	124	.083
58	94	.061	71	100	.111	76	104	.139	87	123	.095
59	93	.073	72	99	.129	77	103	.158	88	122	.109
60	92	.086	73	98	.149	78	102	.178	89	121	.124
61	91	.102	74	97	.170	79	101	.200	90	120	.140
62	90	.118	75	96	.193	80	100	.223	91	119	.157
63	89	.137	76	95	.218	81	99	.248	92	118	.176
64	88	.158	77	94	.245	82	98	.274	93	117	.197
65	87	.180	78	93	.273	83	97	.302	94	116	.218
66	86	.204	79	92	.302	84	96	.330	95	115	.241
67	85	.230	80	91	.333	85	95	.360	96	114	.264
68	84	.257	81	90	.365	86	94	.390	97	113	.289
69	83	.286	82	89	.398	87	93	.421	98	112	.315
70	82	.317	83	88	.432	88	92	.452	99	111	.342
71	81	.348	84	87	.466	89	91	.484	100	110	.370
72	80	.381	85	86	.500	90	90	.516	101	109	.398
73	79	.414	(9,10)			(10,10)			102	108	.427
74	78	.448	45	135	.000	55	155	.000	103	107	.456
75	77	.483	52	128	.000	63	147	.000	104	106	.485
76	76	.517	53	127	.001	64	146	.001	105	105	.515

من أجل عينات حجمها أكبر من 10 يكون $P(T' \leqslant k)$ حيث k عدد صحيح معطى بصورة تقريبية بالمساحة تحت المنحني الطبيعي المعياري الموجودة على يسار :

$$Z = \frac{k + \frac{1}{2} - N_1 (N_1 + N_2 + 1)/2}{\sqrt{N_1 N_2 (N_1 + N_2 + 1)/12}}$$

الجدول ١١ ـ النسب المئوية لتوزيع d .

N	$1-\alpha$				
	.80	.85	.90	.95	.99
5	.45	.47	.51	.56	.67
10	.32	.34	.37	.41	.49
20	.23	.25	.26	.29	.35
25	.21	.22	.24	.26	.32
30	.19	.20	.22	.24	.29
35	.18	.19	.20	.23	.27
40	.17	.18	.19	.21	.25
45	.16	.17	.18	.20	.24
50	.15	.16	.17	.19	.23
For larger values..	$\frac{1.07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{N}}$

α هو إحتمال أن يتجاوز الإنحراف الأعظمي بين التوزيع المجتمع للمجتمع والتوزيع المجتمع للعينة القيمة d المعطاة في الجدول .

الجدول ١٢ ـ أعداد عشوائية

10 09 73 25 33   76 52 01 35 86   34 67 35 48 76   80 95 90 91 17   39 29 27 49 45
37 54 20 48 05   64 89 47 42 96   24 80 52 40 37   20 63 61 04 02   00 82 29 16 65
08 42 26 89 53   19 64 50 93 03   23 20 90 25 60   15 95 33 47 64   35 08 03 36 06
99 01 90 25 29   09 37 67 07 15   38 31 13 11 65   88 67 67 43 97   04 43 62 76 59
12 80 79 99 70   80 15 73 61 47   64 03 23 66 53   98 95 11 68 77   12 17 17 68 33

66 06 57 47 17   34 07 27 68 50   36 69 73 61 70   65 81 33 98 85   11 19 92 91 70
31 06 01 08 05   45 57 18 24 06   35 30 34 26 14   86 79 90 74 39   23 40 30 97 32
85 26 97 76 02   02 05 16 56 92   68 66 57 48 18   73 05 38 52 47   18 62 38 85 79
63 57 33 21 35   05 32 54 70 48   90 55 35 75 48   28 46 82 87 09   83 49 12 56 24
73 79 64 57 53   03 52 96 47 78   35 80 83 42 82   60 93 52 03 44   35 27 38 84 35

98 52 01 77 67   14 90 56 86 07   22 10 94 05 58   60 97 09 34 33   50 50 07 39 98
11 80 50 54 31   39 80 82 77 32   50 72 56 82 48   29 40 52 42 01   52 77 56 78 51
83 45 29 96 34   06 28 89 80 83   13 74 67 00 78   18 47 54 06 10   68 71 17 78 17
88 68 54 02 00   86 50 75 84 01   36 76 66 79 51   90 36 47 64 93   29 60 91 10 62
99 59 46 73 48   87 51 76 49 69   91 82 60 89 28   93 78 56 13 68   23 47 83 41 13

65 48 11 76 74   17 46 85 09 50   58 04 77 69 74   73 03 95 71 86   40 21 81 65 44
80 12 43 56 35   17 72 70 80 15   45 31 82 23 74   21 11 57 82 53   14 38 55 37 63
74 35 09 98 17   77 40 27 72 14   43 23 60 02 10   45 52 16 42 37   96 28 60 26 55
69 91 62 68 03   66 25 22 91 48   36 93 68 72 03   76 62 11 39 90   94 40 05 64 18
09 89 32 05 05   14 22 56 85 14   46 42 75 67 88   96 29 77 88 22   54 38 21 45 98

91 49 91 45 23   68 47 92 76 86   46 16 28 35 54   94 75 08 99 23   37 08 92 00 48
80 33 69 45 98   26 94 03 68 58   70 29 73 41 35   53 14 03 33 40   42 05 08 23 41
44 10 48 19 49   85 15 74 79 54   32 97 92 65 75   57 60 04 08 81   22 22 20 64 13
12 55 07 37 42   11 10 00 20 40   12 86 07 46 97   96 64 48 94 39   28 70 72 58 15
63 60 64 93 29   16 50 53 44 84   40 21 95 25 63   43 65 17 70 82   07 20 73 17 90

61 19 69 04 46   26 45 74 77 74   51 92 43 37 29   65 39 45 95 93   42 58 26 05 27
15 47 44 52 66   95 27 07 99 53   59 36 78 38 48   82 39 61 01 18   33 21 15 94 66
94 55 72 85 73   67 89 75 43 87   54 62 24 44 31   91 19 04 25 92   92 92 74 59 73
42 48 11 62 13   97 34 40 87 21   16 86 84 87 67   03 07 11 20 59   25 70 14 66 70
23 52 37 83 17   73 20 88 98 37   68 93 59 14 16   26 25 22 96 63   05 52 28 25 62

04 49 35 24 94   75 24 63 38 24   45 86 25 10 25   61 96 27 93 35   65 33 71 24 72
00 54 99 76 54   64 05 18 81 59   96 11 96 38 96   54 69 28 23 91   23 28 72 95 29
35 96 31 53 07   26 89 80 93 54   33 35 13 54 62   77 97 45 00 24   90 10 33 93 33
59 80 80 83 91   45 42 72 68 42   83 60 94 97 00   13 02 12 48 92   78 56 52 01 06
46 05 88 52 36   01 39 00 22 86   77 28 14 40 77   93 91 08 36 47   70 61 74 29 41

32 17 90 05 97   87 37 92 52 41   05 56 70 70 07   86 74 31 71 57   85 39 41 18 38
69 23 46 14 06   20 11 74 52 04   15 95 66 00 00   18 74 39 24 23   97 11 89 63 38
19 56 54 14 30   01 75 87 53 79   40 41 92 15 85   66 67 43 68 06   84 96 28 52 07
45 15 51 49 38   19 47 60 72 46   43 66 79 45 43   59 04 79 00 33   20 82 66 95 41
94 86 43 19 94   36 16 81 08 51   34 88 88 15 53   01 54 03 54 56   05 01 45 11 76

98 08 62 48 26   45 24 02 84 04   44 99 90 88 96   39 09 47 34 07   35 44 13 18 80
33 18 51 62 32   41 94 15 09 49   89 43 54 85 81   88 69 54 19 94   37 54 87 30 43
80 95 10 04 06   96 38 27 07 74   20 15 12 33 87   25 01 62 52 98   94 62 46 11 71
79 75 24 91 40   71 96 12 82 96   69 86 10 25 91   74 85 22 05 39   00 38 75 95 79
18 63 33 25 37   98 14 50 65 71   31 01 02 46 74   05 45 56 14 27   77 93 89 19 36

74 02 94 39 02   77 55 73 22 70   97 79 01 71 19   52 52 75 80 21   80 81 45 17 48
54 17 84 56 11   80 99 33 71 43   05 33 51 29 69   56 12 71 92 55   36 04 09 03 24
11 66 44 98 83   52 07 98 48 27   59 38 17 15 39   09 97 33 34 40   88 46 12 33 56
48 32 47 79 28   31 24 96 47 10   02 29 53 68 70   32 30 75 75 46   15 02 00 99 94
69 07 49 41 38   87 63 79 19 76   35 58 40 44 01   10 51 82 16 15   01 84 87 69 38

تابع الجدول ١٢ ـ أعداد عشوائية

09	18	82	00	97	32	82	53	95	27	04	22	08	63	04	83	38	98	73	74	64	27	85	80	44
90	04	58	54	97	51	98	15	06	54	94	93	88	19	97	91	87	07	61	50	68	47	66	46	59
73	18	95	02	07	47	67	72	62	69	62	29	06	44	64	27	12	46	70	18	41	36	18	27	60
75	76	87	64	90	20	97	18	17	49	90	42	91	22	72	95	37	50	58	71	93	82	34	31	78
54	01	64	40	56	66	28	13	10	03	00	68	22	73	98	20	71	45	32	95	07	70	61	78	13
08	35	86	99	10	78	54	24	27	85	13	66	15	88	73	04	61	89	75	53	31	22	30	84	20
28	30	60	32	64	81	33	31	05	91	40	51	00	78	93	32	60	46	04	75	94	11	90	18	40
53	84	08	62	33	81	59	41	36	28	51	21	59	02	90	28	46	66	87	95	77	76	22	07	91
91	75	75	37	41	61	61	36	22	69	50	26	39	02	12	55	78	17	65	14	83	48	34	70	55
89	41	59	26	94	00	39	75	83	91	12	60	71	76	46	48	94	97	23	06	94	54	13	74	08
77	51	30	38	20	86	83	42	99	01	68	41	48	27	74	51	90	81	39	80	72	89	35	55	07
19	50	23	71	74	69	97	92	02	88	55	21	02	97	73	74	28	77	52	51	65	34	46	74	15
21	81	85	93	13	93	27	88	17	57	05	68	67	31	56	07	08	28	50	46	31	85	33	84	52
51	47	46	64	99	68	10	72	36	21	94	04	99	13	45	42	83	60	91	91	08	00	74	54	49
99	55	96	83	31	62	53	52	41	70	69	77	71	28	30	74	81	97	81	42	43	86	07	28	34
33	71	34	80	07	93	58	47	28	69	51	92	66	47	21	58	30	32	98	22	93	17	49	39	72
85	27	48	68	93	11	30	32	92	70	28	83	43	41	37	73	51	59	04	00	71	14	84	36	43
84	13	38	96	40	44	03	55	21	66	73	85	27	00	91	61	22	26	05	61	62	32	71	84	23
56	73	21	62	34	17	39	59	61	31	10	12	39	16	22	85	49	65	75	60	81	60	41	88	80
65	13	85	68	06	87	64	88	52	61	34	31	36	58	61	45	87	52	10	69	85	64	44	72	77
38	00	10	21	76	81	71	91	17	11	71	60	29	29	37	74	21	96	40	49	65	58	44	96	98
37	40	29	63	97	01	30	47	75	86	56	27	11	00	86	47	32	46	26	05	40	03	03	74	38
97	12	54	03	48	87	08	33	14	17	21	81	53	92	50	75	23	76	20	47	15	50	12	95	78
21	82	64	11	34	47	14	33	40	72	64	63	88	59	02	49	13	90	64	41	03	85	65	45	52
73	13	54	27	42	95	71	90	90	35	85	79	47	42	96	08	78	98	81	56	64	69	11	92	02
07	63	87	79	29	03	06	11	80	72	96	20	74	41	56	23	82	19	95	38	04	71	36	69	94
60	52	88	34	41	07	95	41	98	14	59	17	52	06	95	05	53	35	21	39	61	21	20	64	55
83	59	63	56	55	06	95	89	29	83	05	12	80	97	19	77	43	35	37	83	92	30	15	04	98
10	85	06	27	46	99	59	91	05	07	13	49	90	63	19	53	07	57	18	39	06	41	01	93	62
39	82	09	89	52	43	62	26	31	47	64	42	18	08	14	43	80	00	93	51	31	02	47	31	67
59	58	00	64	78	75	56	97	88	00	88	83	55	44	86	23	76	80	61	56	04	11	10	84	08
38	50	80	73	41	23	79	34	87	63	90	82	29	70	22	17	71	90	42	07	95	95	44	99	53
30	69	27	06	68	94	68	81	61	27	56	19	68	00	91	82	06	76	34	00	05	46	26	92	00
65	44	39	56	59	18	28	82	74	37	49	63	22	40	41	08	33	76	56	76	96	29	99	08	36
27	26	75	02	64	13	19	27	22	94	07	47	74	46	06	17	98	54	89	11	97	34	13	03	58
91	30	70	69	91	19	07	22	42	10	36	69	95	37	28	28	82	53	57	93	28	97	66	62	52
68	43	49	46	88	84	47	31	36	22	62	12	69	84	08	12	84	38	25	90	09	81	59	31	46
48	90	81	58	77	54	74	52	45	91	35	70	00	47	54	83	82	45	26	92	54	13	05	51	60
06	91	34	51	97	42	67	27	86	01	11	88	30	95	28	63	01	19	89	01	14	97	44	03	44
10	45	51	60	19	14	21	03	37	12	91	34	23	78	21	88	32	58	08	51	43	66	77	08	83
12	88	39	73	43	65	02	76	11	84	04	28	50	13	92	17	97	41	50	77	90	71	22	67	69
21	77	83	09	76	38	80	73	69	61	31	64	94	20	96	63	28	10	20	23	08	81	64	74	49
19	52	35	95	15	65	12	25	96	59	86	28	36	82	58	69	57	21	37	98	16	43	59	15	29
67	24	55	26	70	35	58	31	65	63	79	24	68	66	86	76	46	33	42	22	26	65	59	08	02
60	58	44	73	77	07	50	03	79	92	45	13	42	65	29	26	76	08	36	37	41	32	64	43	44
53	85	34	13	77	36	06	69	48	50	58	83	87	38	59	49	36	47	33	31	96	24	04	36	42
24	63	73	87	36	74	38	48	93	42	52	62	30	79	92	12	36	91	86	01	03	74	28	38	73
83	08	01	24	51	38	99	22	28	15	07	75	95	17	77	97	37	72	75	85	51	97	23	78	67
16	44	42	43	34	36	15	19	90	73	27	49	37	09	39	85	13	03	25	52	54	84	65	47	59
60	79	01	81	57	57	17	86	57	62	11	16	17	85	76	45	81	95	29	79	65	13	00	48	60

تابع الجدول ١٢ ـ أعداد عشوائية

03	99	11	04	61	93	71	61	68	94	66	08	32	46	53	84	60	95	82	32	88	61	81	91	61
38	55	59	55	54	32	88	65	97	80	08	35	56	08	60	29	73	54	77	62	71	29	92	38	53
17	54	67	37	04	92	05	24	62	15	55	12	12	92	81	59	07	60	79	36	27	95	45	89	09
32	64	35	28	61	95	81	90	68	31	00	91	19	89	36	76	35	59	37	79	80	86	30	05	14
69	57	26	87	77	39	51	03	59	05	14	06	04	06	19	29	54	96	96	16	33	56	46	07	80
24	12	26	65	91	27	69	90	64	94	14	84	54	66	72	61	95	87	71	00	90	89	97	57	54
61	19	63	02	31	92	96	26	17	73	41	83	95	53	82	17	26	77	09	43	78	03	87	02	67
30	53	22	17	04	10	27	41	22	02	39	68	52	33	09	10	06	16	88	29	55	98	66	64	85
03	78	89	75	99	75	86	72	07	17	74	41	65	31	66	35	20	83	33	74	87	53	90	88	23
48	22	86	33	79	85	78	34	76	19	53	15	26	74	33	35	66	35	29	72	16	81	86	03	11
60	36	59	46	53	35	07	53	39	49	42	61	42	92	97	01	91	82	83	16	98	95	37	32	31
83	79	94	24	02	56	62	33	44	42	34	99	44	13	74	70	07	11	47	36	09	95	81	80	65
32	96	00	74	05	36	40	98	32	32	99	38	54	16	00	11	13	30	75	86	15	91	70	62	53
19	32	25	38	45	57	62	05	26	06	66	49	76	86	46	78	13	86	65	59	19	64	09	94	13
11	22	09	47	47	07	39	93	74	08	48	50	92	39	29	27	48	24	54	76	85	24	43	51	59
31	75	15	72	60	68	98	00	53	39	15	47	04	83	55	88	65	12	25	96	03	15	21	91	21
88	49	29	93	82	14	45	40	45	04	20	09	49	89	77	74	84	39	34	13	22	10	97	85	08
30	93	44	77	44	07	48	18	38	28	73	78	80	65	33	28	59	72	04	05	94	20	52	03	80
22	88	84	88	93	27	49	99	87	48	60	53	04	51	28	74	02	28	46	17	82	03	71	02	68
78	21	21	69	93	35	90	29	13	86	44	37	21	54	86	65	74	11	40	14	87	48	13	72	20
41	84	98	45	47	46	85	05	23	26	34	67	75	83	00	74	91	06	43	45	19	32	58	15	49
46	35	23	30	49	69	24	89	34	60	45	30	50	75	21	61	31	83	18	55	14	41	37	09	51
11	08	79	62	94	14	01	33	17	92	59	74	76	72	77	76	50	33	45	13	39	66	37	75	44
52	70	10	83	37	56	30	38	73	15	16	52	06	96	76	11	65	49	98	93	02	18	16	81	61
57	27	53	68	98	81	30	44	85	85	68	65	22	73	76	92	85	25	58	66	88	44	80	35	84
20	85	77	31	56	70	28	42	43	26	79	37	59	52	20	01	15	96	32	67	10	62	24	83	91
15	63	38	49	24	90	41	59	36	14	33	52	12	66	65	55	82	34	76	41	86	22	53	17	04
92	69	44	82	97	39	90	40	21	15	59	58	94	90	67	66	82	14	15	75	49	76	70	40	37
77	61	31	90	19	88	15	20	00	80	20	55	49	14	09	96	27	74	82	57	50	81	60	76	16
38	68	83	24	86	45	13	46	35	45	59	40	47	20	59	43	94	75	16	80	43	85	25	96	93
25	16	30	18	89	70	01	41	50	21	41	29	06	73	12	71	85	71	59	57	68	97	11	14	03
65	25	10	76	29	37	23	93	32	95	05	87	00	11	19	92	78	42	63	40	18	47	76	56	22
36	81	54	36	25	18	63	73	75	09	82	44	49	90	05	04	92	17	37	01	14	70	79	39	97
64	39	71	16	92	05	32	78	21	62	20	24	78	17	59	45	19	72	53	32	83	74	52	25	67
04	51	52	56	24	95	09	66	79	46	48	46	08	55	58	15	19	11	87	82	16	93	03	33	61
83	76	16	08	73	43	25	38	41	45	60	83	32	59	83	01	29	14	13	49	20	36	80	71	26
14	38	70	63	45	80	85	40	92	79	43	52	90	63	18	38	38	47	47	61	41	19	63	74	80
51	32	19	22	46	80	08	87	70	74	88	72	25	67	36	66	16	44	94	31	66	91	93	16	78
72	47	20	00	08	80	89	01	80	02	94	81	33	19	00	54	15	58	34	36	35	35	25	41	31
05	46	65	53	06	93	12	81	84	64	74	45	79	05	61	72	84	81	18	34	79	98	26	84	16
39	52	87	24	84	82	47	42	55	93	48	54	53	52	47	18	61	91	36	74	18	61	11	92	41
81	61	61	87	11	53	34	24	42	76	75	12	21	17	24	74	62	77	37	07	58	31	91	59	97
07	58	61	61	20	82	64	12	28	20	92	90	41	31	41	32	39	21	97	63	61	19	96	79	40
90	76	70	42	35	13	57	41	72	00	69	90	26	37	42	78	46	42	25	01	18	62	79	08	72
40	18	82	81	93	29	59	38	86	27	94	97	21	15	98	62	09	53	67	87	00	44	15	89	97
34	41	48	21	57	86	88	75	50	87	19	15	20	00	23	12	30	28	07	83	32	62	46	86	91
63	43	97	53	63	44	98	91	68	22	36	02	40	08	67	76	37	84	16	05	65	96	17	34	88
67	04	90	90	70	93	39	94	55	47	94	45	87	42	84	05	04	14	98	07	20	28	83	40	60
79	49	50	41	46	52	16	29	02	86	54	15	83	42	43	46	97	83	54	82	59	36	29	59	38
91	70	43	05	52	04	73	72	10	31	75	05	19	30	29	47	66	56	43	82	99	78	29	34	78

تابع الجدول ١٢ ـ أعداد عشوائية

94 01 54 68 74	32 44 44 82 77	59 82 09 61 63	64 65 42 58 43	41 14 54 28 20
74 10 88 82 22	88 57 07 40 15	25 70 49 10 35	01 75 51 47 50	48 96 83 86 03
62 88 08 78 73	95 16 05 92 21	22 30 49 03 14	72 87 71 73 34	39 28 30 41 49
11 74 81 21 02	80 58 04 18 67	17 71 05 96 21	06 55 40 78 50	73 95 07 95 52
17 94 40 56 00	60 47 80 33 43	25 85 25 89 05	57 21 63 96 18	49 85 69 93 26
66 06 74 27 92	95 04 35 26 80	46 78 05 64 87	09 97 15 94 81	37 00 62 21 86
54 24 49 10 30	45 54 77 08 18	59 84 99 61 69	61 45 92 16 47	87 41 71 71 98
30 94 55 75 89	31 73 25 72 60	47 67 00 76 54	46 37 62 53 66	94 74 64 95 80
69 17 03 74 03	86 99 59 03 07	94 30 47 18 03	26 82 50 55 11	12 45 99 13 14
08 34 58 89 75	35 84 18 57 71	08 10 55 99 87	87 11 22 14 76	14 71 37 11 81
27 76 74 35 84	85 30 18 89 77	29 49 06 97 14	73 03 54 12 07	74 69 90 93 10
13 02 51 43 38	54 06 61 52 43	47 72 46 67 33	47 43 14 39 05	31 04 85 66 99
80 21 73 62 92	98 52 52 43 35	24 43 22 48 96	43 27 75 88 74	11 46 61 60 82
10 87 56 20 04	90 39 16 11 05	57 41 10 63 68	53 85 63 07 43	08 67 08 47 41
54 12 75 73 26	26 62 91 90 87	24 47 28 87 79	30 54 02 78 86	61 73 27 54 54
60 31 14 28 24	37 30 14 26 78	45 99 04 32 42	17 37 45 20 03	70 70 77 02 14
49 73 97 14 84	92 00 39 80 86	76 66 87 32 09	59 20 21 19 73	02 90 23 32 50
78 62 65 15 94	16 45 39 46 14	39 01 49 70 66	83 01 20 98 32	25 57 17 76 28
66 69 21 39 86	99 83 70 05 82	81 23 24 49 87	09 50 49 64 12	90 19 37 95 68
44 07 12 80 91	07 36 29 77 03	76 44 74 25 37	98 52 49 78 31	65 70 40 95 14
41 46 88 51 49	49 55 41 79 94	14 92 43 96 50	95 29 40 05 56	70 48 10 69 05
94 55 93 75 59	49 67 85 31 19	70 31 20 56 82	66 98 63 40 99	74 47 42 07 40
41 61 57 03 60	64 11 45 86 60	90 85 06 46 18	80 62 05 17 90	11 43 63 80 72
50 27 39 31 13	41 79 48 68 61	24 78 18 96 83	55 41 18 56 67	77 53 59 98 92
41 39 68 05 04	90 67 00 82 89	40 90 20 50 69	95 08 30 67 83	28 10 25 78 16
25 80 72 42 60	71 52 97 89 20	72 68 20 73 85	90 72 65 71 66	98 88 40 85 83
06 17 09 79 65	88 30 29 80 41	21 44 34 18 08	68 98 48 36 20	89 74 79 88 82
60 80 85 44 44	74 41 28 11 05	01 17 62 88 38	36 42 11 64 89	18 05 95 10 61
80 94 04 48 93	10 40 83 62 22	80 58 27 19 44	92 63 84 03 33	67 05 41 60 67
19 51 69 01 20	46 75 97 16 43	13 17 75 52 92	21 03 68 28 08	77 50 19 74 27
49 38 65 44 80	23 60 42 35 54	21 78 54 11 01	91 17 81 01 74	29 42 09 04 38
06 31 28 89 40	15 99 56 93 21	47 45 86 48 09	98 18 98 18 51	29 65 18 42 15
60 94 20 03 07	11 89 79 26 74	40 40 56 80 32	96 71 75 42 44	10 70 14 13 93
92 32 99 89 32	78 28 44 63 47	71 20 99 20 61	39 44 89 31 36	25 72 20 85 64
77 93 66 35 74	31 38 45 19 24	85 56 12 96 71	58 13 71 78 20	22 75 13 65 18
38 10 17 77 56	11 65 71 38 97	95 88 95 70 67	47 64 81 38 85	70 66 99 34 06
39 64 16 94 57	91 33 92 25 02	92 61 38 97 19	11 94 75 62 03	19 32 42 05 04
84 05 44 04 55	99 39 66 36 80	67 66 76 06 31	69 18 19 68 45	38 52 51 16 00
47 46 80 35 77	57 64 96 32 66	24 70 07 15 94	14 00 42 31 53	69 24 90 57 47
43 32 13 13 70	28 97 72 38 96	76 47 96 85 62	62 34 20 75 89	08 89 90 59 85
64 28 16 18 26	18 55 56 49 37	13 17 33 33 65	78 85 11 64 99	87 06 41 30 75
66 84 77 04 95	32 35 00 29 85	86 71 63 87 46	26 31 37 74 63	55 38 77 26 81
72 46 13 32 30	21 52 95 34 24	92 58 10 22 62	78 43 86 62 76	18 39 67 35 38
21 03 29 10 50	13 05 81 62 18	12 47 05 65 00	15 29 27 61 39	59 52 65 21 13
95 36 26 70 11	06 65 11 61 36	01 01 60 08 57	55 01 85 63 74	35 82 47 17 08
49 71 29 73 80	10 40 45 54 52	34 03 06 07 26	75 21 11 02 71	36 63 36 84 24
58 27 56 17 64	97 58 65 47 16	50 25 94 63 45	87 19 54 60 92	26 78 76 09 39
89 51 41 17 88	68 22 42 34 17	73 95 97 61 45	30 34 24 02 77	11 04 97 20 49
15 47 25 06 69	48 13 93 67 32	46 87 43 70 88	73 46 50 98 19	58 86 93 52 20
12 12 08 61 24	51 24 74 43 02	60 88 35 21 09	21 43 73 67 86	49 22 67 78 37

تابع الجدول ١٢ ـ أعداد عشوائية

19 61 27 84 30	11 66 19 47 70	77 60 36 56 69	86 86 81 26 65	30 01 27 59 89
39 14 17 74 00	28 00 06 42 38	73 25 87 17 94	31 34 02 62 56	66 45 33 70 16
64 75 68 04 57	08 74 71 28 36	03 46 95 06 78	03 27 44 34 23	66 67 78 25 56
92 90 15 18 78	56 44 12 29 98	29 71 83 84 47	06 45 32 53 11	07 56 55 37 71
03 55 19 00 70	09 48 39 40 50	45 93 81 81 35	36 90 84 33 21	11 07 35 18 03
98 88 46 62 09	06 83 05 36 56	14 66 35 63 46	71 43 00 49 09	19 81 80 57 07
27 36 98 68 82	53 47 30 75 41	53 63 37 08 63	03 74 81 28 22	19 36 04 90 88
59 06 67 59 74	63 33 52 04 83	43 51 43 74 81	58 27 82 69 67	49 32 54 39 51
91 64 79 37 83	64 16 94 90 22	98 58 80 94 95	49 82 95 90 68	38 83 10 48 38
83 60 59 24 19	39 54 20 77 72	71 56 87 56 73	35 18 58 97 59	44 90 17 42 91
24 89 58 85 30	70 77 43 54 39	46 75 87 04 72	70 20 79 26 75	91 62 36 12 75
35 72 02 65 56	95 59 62 00 94	73 75 08 57 88	34 26 40 17 03	46 83 36 52 48
14 14 15 34 10	38 64 90 63 43	57 25 66 13 42	72 70 97 53 18	90 37 93 75 62
27 41 67 56 70	92 17 67 25 35	93 11 95 60 77	06 88 61 82 44	92 34 43 13 74
82 07 10 74 29	81 00 74 77 49	40 74 45 69 74	23 33 68 88 21	53 84 11 05 36
21 44 58 27 93	24 83 19 32 41	14 19 97 62 68	70 88 36 80 02	03 82 91 74 43
72 51 37 64 00	52 22 59 23 48	62 30 89 84 81	29 74 43 31 65	33 14 16 10 20
71 47 94 50 27	76 16 05 74 11	13 78 01 36 32	52 30 87 77 62	88 87 43 36 97
83 21 05 14 66	09 08 85 03 95	26 74 30 53 06	21 70 67 00 01	99 43 98 07 67
68 74 99 51 48	94 89 77 86 36	96 75 00 90 24	94 53 89 11 43	96 69 36 18 86
05 18 47 57 63	47 07 58 81 58	05 31 35 34 39	14 90 80 88 30	60 09 62 15 51
13 65 16 25 46	96 89 22 52 40	47 51 15 84 83	87 34 27 88 18	07 85 53 92 69
00 56 62 12 20	00 29 22 40 69	25 07 22 95 19	52 54 85 40 91	21 28 22 12 96
50 95 81 76 95	58 07 26 89 90	60 32 99 59 55	71 58 66 34 17	35 94 76 78 07
57 62 16 45 47	46 85 03 79 81	38 52 70 90 37	64 75 60 33 24	04 98 68 36 66
09 28 22 58 44	79 13 97 84 35	35 42 84 35 61	69 79 96 33 14	12 99 19 35 16
23 39 49 42 06	93 43 23 78 36	94 91 92 68 46	02 55 57 44 10	94 91 54 81 99
05 28 03 74 70	93 62 20 43 45	15 09 21 95 10	18 09 41 66 13	78 23 45 00 01
95 49 19 79 76	38 30 63 21 92	82 63 95 46 24	72 43 49 26 06	23 19 17 46 98
78 52 10 01 04	18 24 87 55 83	90 32 65 07 85	54 03 46 62 51	35 77 41 46 92
96 34 54 45 79	85 93 24 40 53	75 70 42 08 40	86 58 38 39 44	52 45 67 37 66
77 96 33 11 51	32 36 49 16 91	47 35 74 03 38	23 43 52 40 65	08 45 89 53 66
07 52 01 12 94	23 23 80 17 48	41 69 06 73 28	54 81 43 77 77	10 05 74 23 32
38 42 30 23 09	70 70 38 57 36	46 14 81 42 58	29 23 61 21 52	05 08 86 58 25
02 46 36 55 33	21 19 96 05 55	33 92 80 18 17	07 39 68 92 15	30 72 22 21 02
15 88 09 22 61	17 29 28 81 90	61 78 14 88 98	92 52 52 12 83	88 58 16 00 98
71 92 60 08 19	59 14 40 02 24	30 57 09 01 94	18 32 90 69 99	26 85 71 92 38
64 42 52 81 08	16 55 41 60 16	00 04 28 32 29	10 33 33 61 68	65 61 79 48 34
79 78 22 39 24	49 44 03 04 32	81 07 73 15 43	95 21 66 48 65	13 65 85 10 81
35 33 77 45 38	44 55 36 46 72	90 96 04 18 49	93 86 54 46 08	93 17 63 48 51
05 24 92 93 29	19 71 59 40 82	14 73 88 66 67	43 70 86 63 54	93 69 22 55 27
56 46 39 93 80	38 79 38 57 74	19 05 61 39 39	46 06 22 76 47	66 14 66 32 10
96 29 63 31 21	54 19 63 41 08	75 81 48 59 86	71 17 11 51 02	28 99 26 31 65
98 38 03 62 69	60 01 40 72 01	62 44 84 63 85	42 17 58 83 50	46 18 24 91 26
52 56 76 43 50	16 31 55 39 69	80 39 58 11 14	54 35 86 45 78	47 26 91 57 47
78 49 89 08 30	25 95 59 92 36	43 28 69 10 64	99 96 99 51 44	64 42 47 73 77
49 55 32 42 41	08 15 08 95 35	08 70 39 10 41	77 32 38 10 79	45 12 79 36 86
32 15 10 70 75	83 15 51 02 52	73 10 08 86 18	23 89 18 74 18	45 41 72 02 68
11 31 45 03 63	26 86 02 77 99	49 41 68 35 34	19 18 70 80 59	76 67 70 21 10
12 36 47 12 10	87 05 25 02 41	90 78 59 78 89	81 39 95 81 30	64 43 90 56 14